

VISIT...

LANZAROTE
Caliente.COM

РИЖСКИЙ ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. А. Я. ПЕЛЬШЕ

Р. Б. РИКАРДС

**МЕТОД
КОНЕЧНЫХ
ЭЛЕМЕНТОВ
В ТЕОРИИ
ОБОЛОЧЕК
И ПЛАСТИН**



РИГА «ЗИНАТНЕ» 1988

Рикардс Р. Б. Метод конечных элементов в теории оболочек и пластин. — Рига: Зинатне, 1988. — 284 с. — ISBN 5-7966-0108-3.

Изложены теория и основные соотношения метода конечных элементов для расчета анизотропных оболочек произвольной геометрии. На базе теории Тимошенко построены конечные элементы пластин, оболочек вращения и оболочек произвольной формы. Рассмотрены задачи статик, динамики и устойчивости оболочек из однородных и композитных материалов. Обсуждены вопросы сходимости решения, оценки точности метода конечных элементов и численной реализации на ЭВМ пакетов программ для расчета тонкостенных конструкций. Табл. 26, ил. 94, библиогр. 175 назв.

Ответственный редактор д-р техн. наук *Г. А. Тетерс*

Рецензенты: чл.-кор. АН ЛатвССР *В. П. Тамуж*,
д-р физ.-мат. наук *Н. В. Баничук*

Печатается по решению Редакционно-издательского совета
Академии наук ЛатвССР от 16 октября 1986 года

**Роланд Брунович Рикардс
МЕТОД КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ
В ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН**

Редактор *А. Морозова*. Художник *Ю. Семенов*.

Художественный редактор *В. Пугачева*.

Технический редактор *Э. Высоцка*. Корректор *Н. Лебедева*.

ИБ № 2783

Сдано в набор 20.10.87. Подписано в печать 22.04.88. ЯТ 05267. Формат 60×90/16. Бумага типогр. № 1. Гарнитура литературная. Печать высокая. 17,75 физ. печ. л.; 17,75 усл. печ. л.; 17,75 усл. кр.-отт.; 14,56 уч.-изд. л. Тираж 2000 экз. Заказ № 1345. Цена 1 р. 20 к. Заказное. Издательство «Зинатне», 226530 ГСП Рига, ул. Тургенева, 19. Отпечатано в типографии «Циня» Государственного комитета Латвийской ССР по делам издательства, полиграфии и книжной торговли, 226011 Рига, ул. Блау-маня, 38/40.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Создание прочных и надежных конструкций с высокими показателями качества является важной задачей во многих областях современной техники.

В связи с бурным развитием вычислительной техники в течение последних 15—20 лет получили широкое развитие численные методы анализа конструкций. В решении задач строительной механики и механики деформируемого твердого тела большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных постановках. Среди них особое место занимает метод конечных элементов благодаря его универсальности в программной реализации и возможности создания полностью автоматизированного цикла расчета. В настоящее время метод конечных элементов заложен в основу почти всех систем автоматизированного расчета конструкций во многих отраслях техники: авиастроении, судостроении, машиностроении, промышленном и гражданском строительстве и др.

Теории и решению задач деформирования конструкций методом конечных элементов посвящен целый ряд монографий и учебников. Среди них следует отметить работы И. Ф. Образцова, В. А. Постнова, О. Зенкевича, Дж. Одена, К. Бате и Э. Вилсона, Р. Галлагера, Г. Стренга и Дж. Фикса. Основные созданные в мире (кроме социалистических стран) комплексы программ метода конечных элементов отражены в справочнике под редакцией К. Бреббиа.

В вышеупомянутых работах рассмотрены вопросы расчета конструкций различных типов: стержневых систем, осесимметричных и трехмерных конструкций, а также отдельные вопросы расчета тонкостенных конструкций — оболочек и пластин. Предлагаемая читателям монография Р. Б. Рикардса целиком посвящена применению метода конечных элементов в расчетах тонкостенных конструкций. При этом рассмотрен целый комплекс проблем начиная с построения основных соотношений теории оболочек, вывода вариационных уравнений различных типов, построения конечных элементов и кончая численной реали-

зацией метода конечных элементов и решением множества практических задач.

Основные трудности на пути решения задач деформирования тонкостенных конструкций методом конечных элементов связаны с необходимостью выполнения определенных условий сходимости. Одним из таких условий является необходимость соблюдения непрерывности искомых функций, а иногда и их первых производных на границах смежных элементов. Для пластин и оболочек, расчет которых основан на классической теории на базе гипотезы Кирхгофа—Лява, данное условие оказывается трудновыполнимым. Поэтому для расчета пластин и оболочек было создано множество конечных элементов, основанных на несогласованных аппроксимациях. Вообще говоря, при размельчении сетки несогласованность полей перемещений уменьшается и в пределе результат должен сходиться. Однако применение несогласованных конечных элементов не позволяет контролировать точность расчета. В классической теории оболочек существует также ряд дополнительных трудностей: формулировка граничных условий в острых углах, граничных условий при нелинейных деформациях и др. Кроме того, классическая теория не учитывает поперечные сдвиги и деформации в трансверсальном направлении, что важно для современных композитных материалов.

В настоящей работе указанные проблемы удастся решить путем выбора подходящего для метода конечных элементов варианта теории оболочек. Вариационные уравнения строятся на базе соотношений теории оболочек типа Тимошенко. Такой выбор обеспечивает понижение порядка производных искомых функций в исходных функционалах от второго в классической теории оболочек к первому в теории оболочек типа Тимошенко. Этим значительно упрощается построение конечных элементов для произвольных оболочек. Кроме того, применение теории оболочек типа Тимошенко позволяет учитывать специфические особенности деформирования композитных материалов — низкие жесткость и прочность в трансверсальном направлении.

На базе теории оболочек типа Тимошенко построены функционалы типа Лагранжа, Рейснера, Кастильяно и функционал обобщенного вариационного принципа. На этой основе выводится ряд новых конечных элементов (элемент третьего порядка для оболочек вращения, семейство треугольных элементов второго и третьего порядков для пластин и произвольных оболочек) и ряд гибридных конечных элементов для плоских элементов конструкций. Проведено тестирование всех конечных элементов в задачах изгиба, устойчивости и колебаний. Рассмотрены также некоторые задачи нелинейного деформирования оболочек. В приложениях обсуждены вопросы сходимости решения,

оценки точности метода, выбора схем численного интегрирования, а также дано краткое описание содержания пакета прикладных программ КОМПОЗИТ для анализа тонкостенных конструкций, который реализован на языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ серии ЕС.

Таким образом, изложенные в монографии результаты исследований охватывают целый комплекс проблем применения метода конечных элементов в расчетах тонкостенных конструкций, и она будет полезной для научных сотрудников и инженеров, занимающихся расчетом современных композитных конструкций и разработкой автоматизированных методов расчета.

В. П. Тамуж, Г. А. Тетерс

ОТ АВТОРА

В этой книге рассматриваются проблемы создания автоматизированных методов расчета прочности тонкостенных конструкций, которые привлекают внимание исследователей и инженеров в связи с их широким применением в авиации, космической технике, судостроении и машиностроении. Интерес исследователей к проблемам расчета прочности тонкостенных конструкций связан с необходимостью построения завершенной теории оболочек, а также создания эффективных методов расчета. Инженерам как пользователям разработок исследователей необходимы эффективные алгоритмы и программы, позволяющие с минимальными затратами получать надежную оценку несущей способности тонкостенных конструкций. При этом требуется высокая степень автоматизации труда инженера начиная с моделирования геометрии конструкции, анализа реакций конструкции на различные воздействия и кончая графическим представлением и оценкой точности результатов расчета.

В настоящее время существует только два метода, с помощью которых можно проводить полностью автоматизированный расчет прочности сложных конструкций. Это метод конечных элементов (МКЭ) и метод граничных элементов (МГЭ). Метод граничных элементов весьма эффективен при расчете прочности однородных массивных трехмерных конструкций. По точности решения, по затратам времени на подготовку данных и по времени расчета для трехмерных задач метод граничных элементов имеет лучшие показатели, чем метод конечных элементов. Однако в геометрически нелинейных задачах при расчете прочности неоднородных и анизотропных конструкций метод конечных элементов в настоящее время имеет преимущества перед методом граничных элементов. Это относится и к расчету прочности оболочек, где метод конечных элементов является основным инструментом для анализа реакций конструкций на сложные внешние воздействия.

Первые разработки по проблемам применения метода конечных элементов в расчетах прочности тонкостенных конструк-

ций появились в середине 60-х гг. Были достигнуты значительные успехи как в теоретических разработках, так и в практической реализации метода в виде пакетов прикладных программ для ЭВМ. Однако в настоящее время еще не достигнут уровень; необходимый для того, чтобы проводить полностью автоматизированный расчет прочности любой сложной тонкостенной конструкции. Это прежде всего относится к конструкциям из композитных материалов и к конструкциям, работающим в экстремальных условиях и взаимодействующим с внешней средой. Для расчета прочности оболочек из композитных материалов необходима разработка новых моделей конечных элементов, которые отражают особенности деформирования этих неоднородных и анизотропных материалов. Моделирование поведения конструкций из композитных материалов необходимо проводить с учетом структуры и неоднородности материала. Основные соотношения теории оболочек, на базе которой строятся конечно-элементные модели, должны отражать вышеперечисленные особенности композитных материалов. В данной книге автор пытался отразить некоторые нерешенные проблемы механики тонкостенных композитных конструкций, а также изложил свою теоретическую концепцию, на основе которой можно создать полностью автоматизированную систему расчетов прочности оболочечных конструкций.

В заключение автор пользуется приятной возможностью поблагодарить всех тех, кто способствовал выходу данной книги. Автор выражает благодарность Н. В. Баничуку и В. П. Тамужу, которые отрецензировали рукопись и дали автору ряд важных советов, что, несомненно, пошло на пользу рукописи, а также Г. А. Тетерсу, который отредактировал рукопись. Особую благодарность автор выражает А. К. Чате, с большим искусством реализовавшему теоретические разработки в виде вычислительных программ для ЭВМ, а также осуществившему все расчеты.

ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Если это специально не оговорено, то для дважды повторяющихся индексов принято правило суммирования Эйнштейна; при этом латинские индексы принимают значения 1, 2, 3, а греческие индексы — 1, 2.

- σ_{ij} — компоненты тензора напряжений;
- e_{ij} — компоненты тензора деформаций;
- u_i — компоненты вектора перемещений;
- dV — элементарный объем тела;
- dS — элементарная площадь поверхности;
- ds — элементарная длина линии;
- S_T — граница поверхности тела, где заданы силы;
- S_u — граница поверхности тела, где заданы перемещения;
- T^*_i — заданные силы на границе S_T ;
- u^*_i — заданные перемещения на границе S_u ;
- c_T — граничная линия поверхности, где заданы силы;
- c_u — граничная линия поверхности, где заданы перемещения;
- Π — потенциальная энергия тела;
- T — кинетическая энергия тела;
- U — энергия деформаций тела;
- Φ — дополнительная энергия деформаций тела;
- W — работа внешних сил;
- δf — первая вариация функции или функционала f ;
- $\delta^2 f$ — вторая вариация функции или функционала f ;

- n_i — компоненты вектора единичной нормали граничной поверхности тела;
 v — нормаль граничной линии поверхности;
 s — касательная граничной линии поверхности;
 A^{ijkl} — компоненты тензора жесткости;
 a^{ijkl} — компоненты тензора податливости;
 Π_W — функционал Вашицу;
 Π_R — функционал Рейснера;
 Π_{RM} — модифицированный функционал Рейснера;
 Π_K — функционал Кастильяно;
 $\Pi_L = \Pi$ — функционал Лагранжа;
 $x^\alpha; x_3$ — система криволинейных нормальных координат на поверхности;
 $a_\alpha; a_3$ — базисные векторы системы координат $x^\alpha; x_3$;
 x^i — система криволинейных координат;
 g_i — базисные векторы системы координат x^i ;
 x, y, z — локальная декартова система координат;
 X, Y, Z — глобальная декартова система координат;
 i_1, i_2, i_3 — базисные векторы декартовой системы координат;
 $X^\alpha; X^3$ — система криволинейных координат на деформированную поверхность;
 $A_\alpha; A_3$ — базисные векторы системы координат $X^\alpha; X^3$;
 $\bar{r}$ — радиус-вектор произвольной точки оболочки до деформации;
 r — радиус-вектор точки на срединной поверхности оболочки до деформации;
 $\bar{R}$ — радиус-вектор произвольной точки оболочки после деформации;
 R — радиус-вектор точки на срединной поверхности оболочки после деформации;

- ∇ — оператор Гамильтона;
 $\otimes$ — знак тензорного умножения;
 $g_{ij} = g_i \cdot g_j$ — метрический тензор пространства;
 $a_{\alpha\beta} = a_\alpha \cdot a_\beta$ — метрический (первый) тензор поверхности;
 $b_{\alpha\beta}$ — второй тензор поверхности;
 $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$ — дискриминантный тензор поверхности;
 ε_{ijk} — дискриминантный тензор пространства;
 $H = b_\alpha^\alpha$ — средняя кривизна поверхности;
 $K = \det(b_\beta^\alpha)$ — гауссова кривизна поверхности;
 μ_β^α — компоненты тензора оболочки;
 $(\)_1$ — знак ковариантного дифференцирования в метрике g_{ij} пространства;
 $(\)_{||}$ — знак ковариантного дифференцирования в метрике $a_{\alpha\beta}$ поверхности;
 $\mathbf{v}$ — вектор перемещения срединной поверхности;
 $v^\alpha; w$ — компоненты вектора $\mathbf{v}$ в базисе срединной поверхности $a_\alpha; a_3$;
 u, v, w — физические компоненты вектора $\mathbf{v}$;
 γ — вектор поворота;
 $\gamma^\alpha; \gamma$ — компоненты вектора γ в базисе срединной поверхности $a_\alpha; a_3$;
 $\varepsilon_{\alpha\beta}$ — компоненты несимметричного тензора деформаций срединной поверхности оболочки;
 $\Omega_{\alpha\beta}$ — компоненты симметричного тензора деформаций срединной поверхности оболочки;
 $k_{\alpha\beta}$ — компоненты несимметричного тензора искривлений срединной поверхности оболочки;
 $\chi_{\alpha\beta}$ — компоненты симметричного тензора искривлений срединной поверхности оболочки;
 $\Omega_{\alpha 3}$ — компоненты тензора деформаций поперечного сдвига срединной поверхности;
 Ω_{33} — деформации нормали срединной поверхности;

- s, φ, x_3 — координаты поверхности оболочки вращения;
 ρ, φ, x_3 — полярные координаты;
 $N^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора мембранных усилий оболочки;
 $M^{\alpha\beta}$ — компоненты тензора моментов оболочки;
 Q^α — компоненты вектора поперечных сил оболочки;
 σ — матрица внутренних сил;
 ε — матрица деформаций;
 u — матрица перемещений;
 D — матрица коэффициентов жесткости оболочки;
 q — вектор распределенных внешних сил на срединной поверхности оболочки;
 $q^\alpha; q$ — компоненты вектора q в базисе $a_\alpha; a_3$ срединной поверхности;
 $N^*_{(\alpha\beta)}$ — контурные мембранные внешние силы;
 $M^*_{(vv)}$ — внешний изгибающий момент на контуре с нормалью v ;
 $M^*_{(vs)}$ — внешний крутящий момент на контуре с нормалью v и касательной s ;
 Q_* — внешняя поперечная сила на контуре с нормалью v ;
 P — вектор сосредоточенной силы;
 $\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t}$ — скорости точки тела;
 $\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ — ускорения точек тела;
 ρ — плотность материала;
 k — коэффициент поперечного сдвига;
 k_* — коэффициент поперечного обжатия нормали;
 θ — угол между касательной меридиана и осью вращения;
 $r(z)$ — радиус параллели оболочки вращения;
 r, φ, z — цилиндрическая система координат;
 ξ — локальные координаты одномерного конечного элемента;

- $J = \frac{ds}{d\xi}$ — якобиан преобразования координат $s \rightarrow \xi$;
 $N_1, N_2, N_1^*, N_2^*(\xi)$ — кубические полиномы Эрмита;
 $R_i, R_j, R_k, R_l(\xi)$ — кубические функции формы четырехузловое одномерного конечного элемента;
 d_e — вектор узловых перемещений конечного элемента;
 F_e — вектор узловых сил конечного элемента;
 K_e — матрица жесткости конечного элемента;
 M_e — матрица масс конечного элемента;
 G_e — матрица геометрической жесткости конечного элемента;
 d — вектор узловых перемещений всей конструкции;
 F — вектор узловых сил всей конструкции;
 K, M, G — матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости всей конструкции;
 N — матрица аппроксимирующих функций перемещений;
 P — матрица аппроксимирующих функций напряжений;
 Φ_R — диссипативная функция Рэлея;
 E_1, E_2, E_3 — модули упругости в направлении координатных осей;
 G_{13}, G_{23}, G_{12} — модули сдвига в плоскостях координатных осей;
 $\nu_{12}, \nu_{13}, \nu_{23}$ — коэффициенты Пуассона;
 E, ν — модуль упругости и коэффициент Пуассона изотропного или трансверсально-изотропного материала в плоскости изотропии;
 ω — угловая частота колебаний;
 λ_* — критический параметр нагрузки;
 n_d — число параметров в аппроксимации перемещений;
 n_σ — число параметров в аппроксимации напряжений;

q_n — число степеней свободы конечного элемента при его перемещении как жесткого тела;

β — матрица параметров аппроксимации напряжений;

$\mathbf{H}$ — матрица податливости;

$\mathbf{N}_e$ — матрица аппроксимирующих функций деформаций;

Φ — матрица параметров аппроксимации деформаций;

h — толщина оболочки;

β_k — угол армирования k -го слоя;

h_k — толщина k -го слоя;

$\theta_k = h_k/h$ — относительная толщина k -го слоя;

L_1, L_2, L_3 — локальные L -координаты треугольника;

D — цилиндрическая жесткость оболочки или пластины;

Q_{ijkl} — компоненты тензора мембранной жесткости оболочки;

B_{ijkl} — компоненты тензора мембранно-изгибной жесткости оболочки;

D_{ijkl} — компоненты тензора изгибной жесткости оболочки;

$Q_{ij}, B_{ij}, D_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ — матричные компоненты тензоров мембранной, мембранно-изгибной и изгибной жесткости оболочки;

$A_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ — матричные компоненты тензора жесткости;

$a_{ij} (i, j = 1, 2, \dots, 6)$ — матричные компоненты тензора податливости;

U_0 — удельная энергия деформаций;

Φ_0 — удельная дополнительная энергия деформаций;

$x_3^{(k)}, z_k$ — внутренняя координата k -го слоя;

$T_{(i)}$ — физические компоненты вектора $\mathbf{G}$;

$T_{(ij)}$ — физические компоненты тензора второго ранга $\mathbf{T}$;

$T_{(ijkl)}$ — физические компоненты тензора четвертого ранга $\mathbf{T}$;

$\mathbf{C}$ — матрица демпфирования.

ОСНОВНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН В ВАРИАЦИОННОЙ ПОСТАНОВКЕ

1.1. ВВЕДЕНИЕ

В последнее время в решении задач механики твердого деформируемого тела большое значение приобрели численные методы, основанные на вариационных постановках. К ним в первую очередь относится метод конечных элементов. Преимущества вариационных методов очевидны как с теоретической, так и с практической точки зрения. Использование вариационных постановок задач в численных методах позволяет проще получать решения, так как функционалы имеют более низкий порядок производных искомых функций, чем в соответствующих дифференциальных уравнениях. На основе вариационных методов можно конструировать приближенные решения на классе кусочно-гладких функций, определенных в подобластях конечных размеров, в так называемых конечных элементах. Условия стыковки соседних конечных элементов требуют выполнения главных граничных условий вариационной задачи, которые зависят от порядка производных в функционалах. Чем ниже порядок производных искомых функций в исходных функционалах, тем проще построить локальные аппроксимации для конечных элементов, удовлетворяющие условиям стыковки. Очевидным преимуществом вариационных методов является автоматическое выполнение естественных граничных условий. Другим преимуществом вариационных постановок является возможность применения двойственного анализа, т. е. получение с помощью приближенного решения верхних и нижних границ точного решения. Это осуществляется на основе применения двойственных вариационных принципов к одной и той же задаче. Все указанные теоретические преимущества вариационных постановок не были бы столь существенными, если бы практическая реализация методов конечных элементов оказалась сложной. Однако простота, экономичность и, главное, универсальность вычислительных алгоритмов для различных схем метода конечных элементов привели к тому, что в настоящее время этот метод является основным методом расчета разнообразных

конструкций и сооружений. Созданные универсальные вычислительные комплексы [102] позволяют решать многие выдвинутые практикой задачи.

Однако существует также ряд нерешенных проблем. Как было указано в проблемной статье, написанной в 1970 г. [173], такой нерешенной проблемой является применение метода конечных элементов в расчетах оболочек. Эта проблема существует и в настоящее время.

Как известно, классическая теория оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа—Лява, в выражениях для минимизируемых функционалов содержит вторые производные от искомой функции прогиба. Следовательно, главными граничными условиями вариационной задачи являются прогиб и первая производная, которые должны быть непрерывны (согласованы) на межэлементных границах. Построение согласованных конечно-элементных двумерных аппроксимаций в этом случае весьма затруднительно даже для плоских конечных элементов, а для оболочек произвольной формы является почти не разрешимой задачей. Построенные на базе теории Кирхгофа—Лява согласованные конечные элементы для пластин [82, 97, 107, 163, 172 и др.] имеют высокий порядок аппроксимации, которая, кроме того, содержит неполные полиномы. Это ухудшает свойства конечных элементов, и их сходимость оказывается хуже, чем сходимость несогласованных конечных элементов. Применение неполных полиномов не позволяет также применять в решении изопараметрическую технику.

Широкое распространение в расчетах оболочек и пластин для линейных задач получили несогласованные конечные элементы [20, 26, 47]. Для них выполняется условие неразрывности прогиба на межэлементных границах, но нарушается неразрывность первой производной от прогиба. Тем не менее в линейных задачах сходимость существует. Однако применение несогласованных конечных элементов для решения нелинейных задач может привести к непредсказуемым погрешностям. Проблему несогласованных аппроксимаций можно решать различными способами. Можно, например, обобщить существующие вариационные принципы на несогласованные аппроксимации путем введения в функционалы дополнительных интегралов, минимизирующих межэлементную несогласованность [169]. Но это связано с дополнительными вычислительными затратами, которые не всегда оправданы.

Таким образом, в вариационных постановках для решения задач деформирования оболочек классическая теория оказывается малоприменимой. Она была создана для сведения трехмерной задачи к двумерной, но это достигалось ценой повышения порядка производной в исходных функционалах. Отметим, что

функционалы теории упругости содержат лишь первые производные от искоемых функций. С точки зрения эффективности решения задач деформирования оболочек вариационными методами сведение трехмерной задачи к двумерной необходимо строить на базе теории оболочек, не повышающих порядок производной в исходных функционалах трехмерной теории упругости. Число искоемых функций после приведения в данном случае имеет второстепенное значение, хотя желательно, чтобы оно было минимальным. Самой распространенной теорией, функционалы которой содержат только первые производные от перемещений, является теория оболочек и пластин типа Тимошенко (или Рейснера). Она основана на гипотезе о независимом повороте нормали. Эта гипотеза впервые была сформулирована в работе С. П. Тимошенко [166] и распространена Э. Рейснером на пластины [142] и оболочки [144]. При динамическом деформировании пластин она впервые была использована в работах Р. Миндлина [118]. Общий случай линейной теории оболочек на основе гипотезы Тимошенко рассмотрен в работах [21, 33, 38, 111, 127, 128, 153 и др.]. Она изложена в монографиях [52, 62, 116 и др.]. Нелинейная теория оболочек типа Тимошенко развита в работах [2, 3, 18, 19, 53, 62]. Различные проблемы учета эффектов, связанных с поперечными сдвиговыми деформациями, рассмотрены в работах С. А. Амбарцумяна [6, 7].

Теория типа Тимошенко основана на линейной аппроксимации перемещений по толщине оболочек. В линейной теории оболочек типа Тимошенко [38, 52, 62, 76, 116, 118, 127, 128 и др.] обычно рассматривается вариант так называемой пятимодальной теории, в которой поле перемещений характеризуется пятью независимыми функциями: тремя перемещениями срединной поверхности и двумя функциями, характеризующими независимый поворот нормали. Эти функции связаны с деформациями поперечных сдвигов. В нелинейной теории оболочек типа Тимошенко [2, 3, 18, 19, 53] рассматривается вариант шестимодальной теории, в которой поле перемещений характеризуется шестью функциями, характеризующими поворот и обжатие нормали. Этот вариант теории оболочек типа Тимошенко использован в настоящей работе.

Все основные функционалы для оболочек и пластин могут быть получены из трехмерных функционалов. В теории оболочек и пластин используются те же вариационные принципы, что в теории упругости [56, 70, 169]. Вывод двумерных функционалов осуществляется либо непосредственно из трехмерных путем введения гипотез и интегрированием по толщине оболочки, либо конструированием двумерных функционалов, наподобие трехмерных, с использованием двумерных функций и

операторов, аппроксимирующих трехмерное напряженное состояние.

В некоторых случаях специально для оболочек и пластин можно построить частные вариационные принципы трехмерной теории. Вариант такого построения изложен, например, в работе [147].

В настоящей главе рассмотрены общие соотношения линейной теории оболочек и пластин типа Тимошенко и вывод для этой теории функционалов Лагранжа и Гамильтона, т. е. таких функционалов, в которых варьируемыми функциями являются перемещения.

1.2. ОСНОВНЫЕ ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В МЕТОДЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основные уравнения метода конечных элементов могут быть получены на основе различных формулировок. Самым универсальным в практическом применении для различных сред, в том числе для нелинейных, является принцип возможной работы, выраженный в форме принципа возможных перемещений [20, 169]. Принцип возможной работы выражается также в форме принципа возможных сил [169]. Для ряда задач механики деформируемого твердого тела, таких, как термоупругие задачи, термовязкоупругие задачи и др., метод конечных элементов применяется в форме метода Галеркина [20, 44]. Метод конечных элементов можно сформулировать также в форме метода наименьших квадратов, метода энергетического баланса и др. [44, 49]. Наибольшее распространение в применении для метода конечных элементов получили вариационные принципы [20, 26, 44, 169]. Из них наиболее часто применяется принцип минимума (стационарности) полной потенциальной энергии, или принцип Лагранжа [1, 20, 26, 44], который можно использовать для задач, где внешние силы имеют потенциал. Этот принцип применяется как для линейных, так и для физических и геометрических нелинейных задач. При использовании вариационных принципов важно получить оценки точности решения. Так, принцип Лагранжа дает оценку снизу для энергии деформаций (жесткость системы выше точной). Аналогично принцип минимума дополнительной энергии, или принцип Кастильяно, дает оценку сверху (жесткость системы меньше точной). Принцип Кастильяно применяется для линейных задач, если требуется повысить точность определения напряжений. Однако его применение связано с определенными трудностями [20], поэтому принцип Кастильяно в методе конечных элементов не получил столь широкого распространения, как принцип Лагранжа.

Существуют также смешанные формы метода конечных элементов, основанные на вариационном принципе Рейснера или его модификациях, гибридные схемы метода конечных элементов и др. [20]. Для динамических задач применяется принцип Гамильтона, а для сред с диссипацией — различные его модификации.

В настоящей работе при формулировке основных соотношений метода конечных элементов применяются различные вариационные принципы. Рассмотрим основные вариационные принципы теории упругости для решения линейных задач. Для простоты рассмотрим соотношения в декартовой системе координат.

Система уравнений теории упругости и граничные условия представляют собою уравнения Эйлера и естественные граничные условия следующего формально построенного функционала [56, 169]:

$$\Pi_W = \int_V \left\{ -\sigma_{ij} \left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) + U_0(e_{ij}) - F_i u_i \right\} dV - \int_{S_T} T^*_i u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j (u_i - u^*_i) dS. \quad (1.2.1)$$

Здесь $U_0(e_{ij})$ — удельная энергия деформаций; F_i — массовые силы; T^*_i — заданные силы на граничной поверхности S_T ; U^*_i — заданные перемещения на граничной поверхности S_u ($S = S_u + S_T$); n_j — единичная нормаль граничной поверхности.

Перемещения u_i , деформации e_{ij} и напряжения σ_{ij} в функционале (1.2.1) являются независимыми функциональными аргументами. Варьируя функционал (1.2.1) по этим аргументам, пренебрегая нелинейными членами и приравнявая вариацию функционала к нулю, получаем

$$\begin{aligned} \delta \Pi_W = & \int_V \left\{ -\delta \sigma_{ij} \left(e_{ij} - \frac{1}{2} u_{i,j} - \frac{1}{2} u_{j,i} \right) - \right. \\ & - \sigma_{ij} \left(\delta e_{ij} - \frac{1}{2} \delta u_{i,j} - \frac{1}{2} \delta u_{j,i} \right) + \frac{\partial U_0}{\partial e_{ij}} \delta e_{ij} - \\ & - F_i \delta u_i \left. \right\} dV - \int_{S_T} T^*_i \delta u_i dS - \int_{S_u} \{ \delta \sigma_{ij} n_j (u_i - u^*_i) \} dS - \\ & - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS = 0. \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

Приравнявая к нулю множитель при $\delta \sigma_{ij}$ в объемном интеграле,

получаем кинематические соотношения в линейной теории упругости

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (1.2.3)$$

Приравнявая к нулю множитель при $\delta\sigma_{ij}$ в интеграле по поверхности S_u , получаем граничные условия в перемещениях

$$u_i = u^*_i; \quad S \in S_u. \quad (1.2.4)$$

Приравнявая к нулю множитель при δe_{ij} , получаем физическое уравнение

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial e_{ij}}. \quad (1.2.5)$$

Далее, учитывая симметричность тензора напряжений, преобразуем интеграл с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV = \\ & = - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_S \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

С учетом этого преобразования, а также уравнений (1.2.3), (1.2.5) и условия (1.2.4) вариация функционала перепишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_W = & - \int_V (\sigma_{ij,j} + F_i u_i) \delta u_i dV + \\ & + \int_{S_u + S_T} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS - \int_{S_T} T^*_i \delta u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j \delta u_i dS. \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Приравнявая к нулю множитель при δu_i , получаем уравнения равновесия и силовые граничные условия:

$$\sigma_{ij,j} + F_i = 0; \quad (1.2.8)$$

$$\sigma_{ij} n_j = T^*_i; \quad S \in S_T. \quad (1.2.9)$$

Таким образом, из функционала (1.2.1) получена полная система уравнений теории упругости. Принимая часть условий вариационной задачи за предварительные условия, получаем вариационные уравнения, или вариационные принципы, более частного характера, когда функционал зависит от меньшего

Таблица 1.1

Варианты частных вариационных принципов

Предварительные условия	Функционал				
	Вашицу Π_W (1.2.1)	Рейснера Π_R (1.2.10)	Лагранжа Π_L (1.2.16)	Кастель-яно Π_K (1.2.17)	модифици- рованный Рейснера Π_{RM} (1.2.18)
$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})$	—	—	+	—	—
$\sigma_{ij} = \frac{\partial U_0}{\partial e_{ij}}$	—	+	+	+	+
$\sigma_{ij,j} - F_i = 0$	—	—	—	+	+
$u_i = u_i^*; S \in S_u$	—	—	+	—	+
$\sigma_{ijn_j} = T^*_i; S \in S_T$	—	—	—	+	—
Варьируемые функции	u_i, e_{ij}, σ_{ij}	u_i, σ_{ij}	u_i	σ_{ji}	u_i, σ_{ij}

числа варьируемых параметров. В табл. 1.1 показаны варианты вариационных уравнений. Знак «+» означает, что данное условие принято за предварительное, знак «—» означает, что данное условие является уравнением Эйлера или естественным граничным условием вариационной задачи. В последней строке табл. 1.1 указаны независимые функциональные аргументы функционала.

В вариационном принципе Рейснера физические соотношения (1.2.5) приняты за предварительные условия и функционал (1.2.1) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_V \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \Phi_0(\sigma_{ij}) - F_i u_i \right\} dV - \\ & - \int_{S_T} T^*_i u_i dS - \int_{S_u} \sigma_{ijn_j} (u_i - u_i^*) dS. \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Здесь $\Phi_0(\sigma_{ij})$ — удельная дополнительная энергия тела:

$$\Phi_0(\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} e_{ij} - U_0(e_{ij}). \quad (1.2.11)$$

Поясним смысл удельной энергии деформаций $U_0(e_{ij})$ и удельной дополнительной энергии. Для линейно-упругого тела удельная энергия деформаций определяется как площадь под кривой напряжение—деформация (рис. 1.1):

$$U_0(e_{ij}) = \frac{1}{2} \sigma_{ij} e_{ij} = \frac{1}{2} A_{ijkl} e_{ij} e_{kl}. \quad (1.2.12)$$

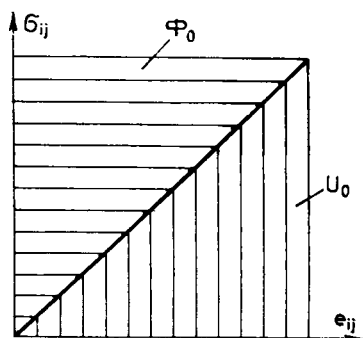


Рис. 1.1. К определению удельной энергии деформаций и удельной дополнительной энергии

Здесь использован закон Гука для линейно-упругого анизотропного тела

$$\sigma_{ij} = A_{ijkl} e_{kl}. \quad (1.2.13)$$

где A_{ijkl} — компоненты тензора упругой жесткости материала. Из (1.2.11) и (1.2.12) получаем следующее выражение для удельной дополнительной энергии:

$$\Phi_0(\sigma_{ij}) = \frac{1}{2} e_{ij} \sigma_{ij} = \frac{1}{2} a_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}. \quad (1.2.14)$$

Здесь использованы обратные соотношения закона Гука

$$e_{ij} = a_{ijkl} \sigma_{kl}, \quad (1.2.15)$$

где a_{ijkl} — компоненты тензора упругой податливости материала.

Если кроме физического соотношения (1.2.5) заранее выполнены кинематические соотношения (1.2.3) и граничные условия в перемещениях (1.2.4), то имеем вариационный принцип Лагранжа, или принцип минимума полной потенциальной энергии П. Функционал (1.2.1) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_L = \Pi = \int_V \left\{ U_0[e_{ij}(u_i)] - F_i u_i \right\} dV - \\ - \int_{S_T} T^*_i u_i dS. \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

Этот функционал имеет прямой физический смысл, так как первый член функционала представляет собой энергию деформаций тела, второй член — работу массовых сил F_i , а третий член — работу заданных внешних сил T^*_i на поверхности S_T .

Сумма этих слагаемых определяет полную потенциальную энергию тела.

Принимая, что заранее выполнены кинематические соотношения (1.2.3), уравнения равновесия (1.2.8), силовые граничные условия (1.2.9), из функционала Рейснера (1.2.10) с учетом преобразования (1.2.6) после умножения на -1 получаем функционал, зависящий только от напряжений:

$$\Pi_K = \int_V \Phi_0(\sigma_{ij}) dV - \int_{S_u} \sigma_{ij} n_j u_i^* dS. \quad (1.2.17)$$

На основе этого функционала формулируется вариационный принцип Кастильяно, или принцип минимума дополнительной энергии, который имеет прямой физический смысл.

Формально из функционала (1.2.1) можно построить еще ряд вариационных уравнений. Так, например, модификацию функционала Рейснера получим, если кроме условия (1.2.5) предварительно выберем условия (1.2.4) и (1.2.8):

$$\begin{aligned} \Pi_{KM} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \sigma_{ij} (u_{i,j} + u_{j,i}) - \Phi_0(\sigma_{ij}) - \right. \\ \left. - F_i u_i \right\} dV - \int_{S_T} T_i^* u_i dS. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

Этот функционал применялся в ряде работ [155—158] для построения гибридных схем метода конечных элементов.

По аналогии с функционалами для трехмерных сред строятся вариационные уравнения для оболочек и пластин с использованием гипотезы теории оболочек и пластин. Эти построения будут приведены после получения основных соотношений теории оболочек и пластин.

1.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

1.3.1. Общий случай криволинейных неортогональных координат

Рассмотрим вывод линейных кинематических соотношений, в основу которых положена сдвиговая модель Тимошенко. Здесь и далее используются различные геометрические соотношения оболочки, приведенные в приложении 1.

Пусть векторы $\bar{\mathbf{r}}$ и $\bar{\mathbf{R}}$ определяют положение произвольной точки оболочки в начальном и текущем деформированном со-

стояниях. Векторы $\mathbf{r}$ и $\mathbf{R}$ определяют положение точки срединной поверхности оболочки в этих состояниях (см. рис. П1.2). Система нормальных координат $\{x^\alpha; x_3\}$ с координатным базисом $\{a_\alpha; a_3\}$ в недеформированном состоянии определена в приложении 1. В текущем деформированном состоянии на срединной поверхности оболочки располагается система координат $\{X^\alpha; X_3\}$ с координатным базисом $\{A^\alpha; A_3\}$. При этом вектор A_3 не обязательно нормален к срединной поверхности.

Векторную функцию $\bar{\mathbf{R}}$, определяющую положение точки на эквидистанционной поверхности, разлагаем в ряд Тейлора в окрестности срединной поверхности:

$$\bar{\mathbf{R}} = \mathbf{R} + x_3 \nabla \otimes \mathbf{R} \cdot \mathbf{a}_3 + \dots \quad (1.3.1)$$

Здесь $\nabla \otimes \mathbf{R} = \mathbf{A}_\alpha \otimes \mathbf{a}^\alpha = \mathbf{G}$ — тензор второго ранга [34], определяющий градиент деформации точек в окрестности срединной поверхности; ∇ — оператор Гамильтона; $\otimes$ — знак тензорного умножения. Обозначая через $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ векторы перемещения соответственно произвольной точки и точки на срединной поверхности, имеем (рис. 1.2)

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{r}} + \mathbf{u}; \quad \mathbf{R} = \mathbf{r} + \mathbf{v}. \quad (1.3.2)$$

Из этих соотношений с учетом разложения (1.3.1) и формулы (П1.1) получаем (рис. 1.2)

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + x_3 \gamma. \quad (1.3.3)$$

Здесь γ — вектор поворота нормального элемента:

$$\gamma = \mathbf{A}^3 - \mathbf{a}_3, \quad (1.3.4)$$

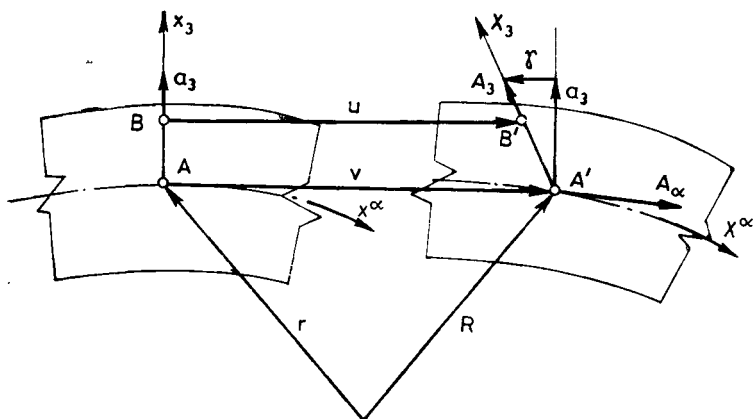


Рис. 1.2. Кинематика деформирования оболочки по модели Тимошенко

где

$$A^3 = \nabla \otimes R \cdot a_3 = A_\alpha \otimes a^\alpha \cdot a_3.$$

Деформации в оболочке согласно гипотезе (1.3.3) определяются из трехмерных соотношений [34]:

$$2e_{ij} = u_{,i} \cdot g_j + u_{,j} \cdot g_i. \quad (1.3.5)$$

Подставляя разложение (1.3.3) в соотношения (1.3.5), получаем

$$\begin{aligned} 2e_{\alpha\beta} &= (v_{,\alpha} + x_3 \gamma_{,\alpha}) \cdot g_\beta + (v_{,\beta} + x_3 \gamma_{,\beta}) \cdot g_\alpha; \\ 2e_{\alpha 3} &= (v_{,\alpha} + x_3 \gamma_{,\alpha}) \cdot g_3 + \gamma \cdot g_\alpha; \\ 2e_{33} &= 2\gamma \cdot g_3. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Векторы поверхности v и γ в координатном базисе $\{a_\alpha; a_3\}$ разлагаются на компоненты:

$$v = v^\alpha a_\alpha + w a_3; \quad \gamma = \gamma^\alpha a_\alpha + \gamma a_3. \quad (1.3.7)$$

При определении производных векторов v и γ необходимы формулы для производных базисных векторов:

$$\begin{aligned} g_{i,j} &= \bar{\Gamma}_{ij}^k g_k; \\ a_{\alpha,\beta} &= \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda + b_{\alpha\beta} a_3. \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Используя соотношения (П1.5), (1.3.7) и (1.3.8), для производных векторов v и γ имеем

$$\begin{aligned} v_{,\alpha} &= \varepsilon_\alpha^\lambda a_\lambda + \Psi_\alpha a_3; \\ \gamma_{,\alpha} &= k_\alpha^\lambda a_\lambda + \varphi_\alpha a_3, \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha^\lambda &= v_{||\alpha}^\lambda - b_\alpha^\lambda w; & \Psi_\alpha &= w_{,\alpha} + b_{\lambda\alpha} v^\lambda; \\ k_\alpha^\lambda &= \gamma_{||\alpha}^\lambda - b_\alpha^\lambda \gamma; & \varphi_\alpha &= \gamma_{,\alpha} + b_{\lambda\alpha} \gamma^\lambda. \end{aligned} \quad (1.3.10)$$

Соотношения для деформаций (1.3.6) с учетом (1.3.9), (П1.7), (П1.8) и (П1.17) принимают вид

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha\beta} + x_3 \chi_{\alpha\beta} + (x_3)^2 \Phi_{\alpha\beta}; \\ e_{\alpha 3} &= \Omega_{\alpha 3} + \frac{1}{2} x_3 \kappa_{\alpha 3}; \\ e_{33} &= \Omega_{33}. \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

Здесь введены следующие симметричные тензоры деформаций и искривлений:

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}); \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\chi_{\alpha\beta} + \chi_{\beta\alpha}); \\ \kappa_{\alpha\beta} &= k_{\alpha\beta} - b_\alpha^\lambda \varepsilon_{\lambda\beta}; \end{aligned}$$

$$2\Phi_{\alpha\beta} = -b_{\alpha}^{\lambda}k_{\lambda\beta} - b_{\beta}^{\lambda}k_{\lambda\alpha};$$

$$\Omega_{\alpha 3} = \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha} + \Psi_{\alpha});$$

$$\kappa_{\alpha 3} = \varphi_{\alpha} - b_{\alpha}^{\lambda}\gamma_{\lambda}; \quad \Omega_{33} = \gamma. \quad (1.3.12)$$

Таким образом, деформации произвольной точки оболочки с помощью соотношений (1.3.11), (1.3.12) и (1.3.10) выражены через шесть обобщенных перемещений v^{α} , ω , γ^{α} , γ , являющихся функциями лишь двух поверхностных координат. Это так называемая шестимодальная теория оболочек. В некоторых случаях можно пренебречь деформациями обжатия нормали. Принимая в соотношениях (1.3.10)—(1.3.12) $\gamma=0$, получаем, что деформации выражены через пять обобщенных перемещений. Это так называемая пятимодальная теория оболочек, которая рассматривалась в работах [52, 111, 116, 128 и др.]. Для многослойных пластин и оболочек гипотеза Тимошенко (пятимодальная) принималась как для всего пакета слоев в целом, так и для отдельного слоя [21, 33, 42, 140 и др.]. В классической теории оболочек, построенной на базе гипотезы Кирхгофа—Лява, деформации поперечного сдвига отсутствуют $\Omega_{\alpha 3}=0$ и из (1.3.12) получаем, что $\gamma_{\alpha} = -\Psi_{\alpha}$. С учетом этого деформации (1.3.11) выражаются только через три независимые функции перемещений v^1 , v^2 , ω . Однако если в теории типа Тимошенко все деформации выражаются только через первые производные обобщенных перемещений, то в классической теории изгибные деформации определяются через вторые производные от перемещений. Это обстоятельство значительно затрудняет применение классической теории в вариационных методах, в частности в методе конечных элементов.

1.3.2. Общий случай криволинейных ортогональных координат

Теоретически соотношения теории оболочек для всех возможных форм поверхностей могут быть записаны в криволинейных ортогональных координатах. Однако в ряде случаев при расчете удобнее использовать неортогональные координаты, в которых проще могут быть записаны граничные условия или физические соотношения. При построении универсальной программы для расчета произвольных оболочек также удобнее пользоваться криволинейными неортогональными координатами. Тем не менее во многих прикладных расчетах отдельных видов оболочек можно использовать криволинейные ортогональные координаты. В этом случае соотношения теории оболочек в координатной записи намного упрощаются.

Кинематические соотношения в координатной записи для случая ортогональных координат могут быть получены из

соотношений (1.3.10), (1.3.12). Для этого компоненты метрического тензора поверхности $a_{\alpha\beta}$ выражаются через коэффициенты Ляме A_1, A_2 :

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{bmatrix} \\ a^{\alpha\beta} &= \begin{bmatrix} a^{11} & 0 \\ 0 & a^{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{A_1^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{A_2^2} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.3.13)$$

По формулам (П1.23) с учетом (1.3.13) определяются символы Кристоффеля:

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial x_1}; \quad \Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \frac{1}{A_1} \frac{\partial A_1}{\partial x^2}; \\ \Gamma_{11}^2 &= -\frac{A_1}{A_2^2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2}; \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^2}; \\ \Gamma_{22}^1 &= -\frac{A_2}{A_1^2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1}; \quad \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \frac{1}{A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1}. \end{aligned} \quad (1.3.14)$$

В ортогональных координатах значительно упрощаются также соотношения (П1.24), связывающие физические и тензорные компоненты векторов и тензоров:

$$\begin{aligned} T_{(\alpha)} &= \frac{1}{A_\alpha} T_\alpha = A_\alpha T^\alpha; \\ T_{(\alpha\beta)} &= \frac{1}{A_\alpha A_\beta} T_{\alpha\beta} = A_\alpha A_\beta T^{\alpha\beta} = \frac{A_\alpha}{A_\beta} T_\beta^\alpha. \end{aligned} \quad (1.3.15)$$

Используя формулы ковариантного дифференцирования (П1.22), с учетом (1.3.14) и (1.3.15) получаем кинематические соотношения (1.3.10) и (1.3.12) в координатной записи для ортогональных криволинейных координат ($u = v_{(1)}$; $v = v_{(2)}$):

$$\begin{aligned} \Omega_{(11)} &= \frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} v - b_{(11)} w; \\ \Omega_{(22)} &= \frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x_1} u - b_{(22)} w; \\ 2\Omega_{(12)} &= \varepsilon_{(12)} + \varepsilon_{(21)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} v + \\ &\quad + \frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u; \end{aligned}$$

$$\chi_{(11)} = \kappa_{(11)} - b_{(11)} \varepsilon_{(11)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \gamma_{(2)} - \\ - b_{(11)} \gamma - b_{(11)} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} v - b_{(11)} \omega \right];$$

$$\chi_{(22)} = \kappa_{(22)} - b_{(22)} \varepsilon_{(22)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \gamma_{(1)} - \\ - b_{(22)} \gamma - b_{(22)} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial v}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} u - b_{(22)} \omega \right];$$

$$2\chi_{(12)} = \kappa_{(12)} + \kappa_{(21)} - b_{(11)} \varepsilon_{(12)} - b_{(22)} \varepsilon_{(21)} = \\ = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \gamma_{(2)} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x^1} - \\ - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \gamma_{(1)} - b_{(11)} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial u}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} v \right] - \\ - b_{(22)} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial v}{\partial x^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} u \right];$$

$$2\Omega_{(13)} = \gamma_{(1)} + \frac{1}{A_1} \frac{\partial \omega}{\partial x^1} + b_{(11)} u;$$

$$2\Omega_{(23)} = \gamma_{(2)} + \frac{1}{A_2} \frac{\partial \omega}{\partial x^2} + b_{(22)} v;$$

$$\Phi_{(11)} = -b_{(11)} \kappa_{(11)} = \\ = -b_{(11)} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x^1} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \gamma_{(2)} - b_{(11)} \gamma \right];$$

$$\Phi_{(22)} = -b_{(22)} \kappa_{(22)} = \\ = -b_{(22)} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x^2} + \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \gamma_{(1)} - b_{(22)} \gamma \right];$$

$$2\Phi_{(12)} = -b_{(11)} \kappa_{(12)} - b_{(22)} \kappa_{(21)} = \\ = -b_{(11)} \left[\frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma_{(1)}}{\partial x^2} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_2}{\partial x^1} \gamma_{(2)} \right] - \\ - b_{(22)} \left[\frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma_{(2)}}{\partial x^1} - \frac{1}{A_1 A_2} \frac{\partial A_1}{\partial x^2} \gamma_{(1)} \right];$$

$$\kappa_{(13)} = \frac{1}{A_1} \frac{\partial \gamma}{\partial x^1}; \quad \kappa_{(23)} = \frac{1}{A_2} \frac{\partial \gamma}{\partial x^2}; \quad \Omega_{(33)} = \gamma. \quad (1.3.16)$$

1.3.3. Оболочки вращения

Для оболочки вращения (см. рис. П1.3) в качестве криволинейных координат в некоторых случаях удобно выбирать координату по меридиану s и координату по окружности φ . Тогда $x^1=s$; $x^2=\varphi$ и соотношения (1.3.16) при $A_1=1$ и $A_2=r$ с учетом формул (П1.27), (П1.31), (П1.34) принимают следующий вид ($\gamma_s=\gamma_{(1)}$; $\gamma_\varphi=\gamma_{(2)}$):

$$\begin{aligned}\Omega_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{d\theta}{ds} w; \\ \Omega_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \sin \theta + w \cos \theta \right); \\ 2\Omega_{s\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \sin \theta \right) + \frac{\partial v}{\partial s}; \\ \chi_{ss} &= \frac{\partial \gamma_s}{\partial s} - \frac{d\theta}{ds} \gamma - \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{\partial u}{\partial s} - \frac{d\theta}{ds} w \right); \\ \chi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_s \sin \theta + \gamma \cos \theta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \sin \theta + w \cos \theta \right) \right]; \\ 2\chi_{s\varphi} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \gamma_s}{\partial \varphi} - \gamma_\varphi \sin \theta - \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \sin \theta \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial v}{\partial s} \cos \theta \right] + \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s}; \\ \Phi_{ss} &= - \frac{d\theta}{ds} \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial s} - \frac{d\theta}{ds} \gamma \right); \\ \Phi_{\varphi\varphi} &= \frac{\cos \theta}{r^2} \left(\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_s \sin \theta + \gamma \cos \theta \right); \\ 2\Phi_{s\varphi} &= \frac{1}{r} \left[- \frac{\partial \theta}{ds} \left(\frac{\partial \gamma_s}{\partial \varphi} - \gamma_\varphi \sin \theta \right) + \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s} \cos \theta \right]; \\ 2\Omega_{s3} &= \gamma_s + \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{d\theta}{ds} u; \\ 2\Omega_{\varphi 3} &= \gamma_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \cos \theta \right); \\ \kappa_{s3} &= \frac{\partial \gamma}{\partial s}; \quad \kappa_{\varphi 3} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad \Omega_{(33)} = \gamma. \end{aligned} \tag{1.3.17}$$

Для замкнутых в вершине оболочек вращения, например сферических, тороидальных и др., более удобно использовать систему координат $x^1 = \alpha$; $x^2 = \varphi$ (см. рис. П1.4). Кривизна оболочек в этом случае определяется по формулам (П1.37), а коэффициенты Ляме — из формул (П1.36) $A_1 = R_1$; $A_2 = r$. Тогда $r = r(\alpha)$, $R_1 = R_1(\alpha)$ и кинематические соотношения (1.3.16) принимают следующий вид ($\gamma_\alpha = \gamma_{(1)}$; $\gamma_\varphi = \gamma_{(2)}$):

$$\begin{aligned}
 \Omega_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right); \\
 \Omega_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \alpha + w \sin \alpha \right); \\
 2\Omega_{\alpha\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \cos \alpha \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \\
 \chi_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R_1} \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + \gamma \right) + \frac{1}{R_1^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + w \right); \\
 \chi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_\alpha \cos \alpha + \gamma \sin \alpha \right) + \\
 &\quad + \frac{\sin \alpha}{r^2} \left[\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \cos \alpha + w \sin \alpha \right]; \\
 2\chi_{\alpha\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \varphi} - \gamma_\varphi \cos \alpha \right) + \frac{1}{R_1} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \alpha} + \\
 &\quad + \frac{1}{R_1} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \cos \alpha \right) + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{1}{R_1} \frac{\partial v}{\partial \alpha}; \\
 2\Omega_{\alpha 3} &= \gamma_\alpha + \frac{1}{R_1} \frac{\partial w}{\partial \alpha} - \frac{1}{R_1} u; \\
 2\Omega_{\varphi 3} &= \gamma_\varphi + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial w}{\partial \varphi} - v \sin \alpha \right); \\
 \Phi_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{R_1^2} \left[\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \alpha} + \gamma \right]; \\
 \Phi_{\varphi\varphi} &= \frac{\sin \alpha}{r^2} \left[\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_\alpha \cos \alpha + \gamma \sin \alpha \right]; \\
 2\Phi_{\alpha\varphi} &= \frac{1}{R_1} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial \varphi} - \gamma_\varphi \cos \alpha \right] + \frac{\sin \alpha}{r} \frac{1}{R_1} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \alpha}; \\
 \kappa_{\alpha 3} &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial \gamma}{\partial \alpha}; \quad \kappa_{\varphi 3} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad \Omega_{(33)} = \gamma. \quad (1.3.18)
 \end{aligned}$$

В этих соотношениях по сравнению с соотношениями (1.3.17) направление координаты $x^2 = \varphi$ противоположное ($d\varphi = -d\varphi$), так как направление координаты $x^1 = \alpha$ противоположно направлению координаты $x^1 = s$ (см. рис. П1.4). Это связано с тем, что сохраняется левая система координат на поверхности оболочки.

Соотношения (1.3.18) могут быть получены также прямо из соотношений (1.3.17) путем следующей замены:

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{ds} &= -\frac{1}{R_1}; \quad \sin \theta = -\cos \alpha; \quad \cos \theta = \sin \alpha; \\ ds &= -R_1 d\alpha; \quad d\varphi = -d\varphi; \quad u = -u; \\ v &= -v; \quad \gamma_s = -\gamma_\alpha; \quad \gamma_\varphi = -\gamma_\varphi; \\ 2\Omega_{s3} &= -2\Omega_{\alpha 3}; \quad 2\Omega_{\varphi 3} = -2\Omega_{\varphi 3}; \\ \chi_{s3} &= -\chi_{\alpha 3}; \quad \chi_{\varphi 3} = -\chi_{\varphi 3}. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Из соотношений (1.3.18) могут быть получены зависимости для отдельных форм оболочек вращения. Например, для сферической оболочки радиусом R в соотношения (1.3.18) следует подставить следующие значения радиуса параллели r и радиуса кривизны меридиана R_1 :

$$r = R \sin \alpha; \quad R_1 = R. \quad (1.3.20)$$

Для тороидальной оболочки (рис. П1.7) в соотношения (1.3.18) следует подставить

$$r = L + R \sin \alpha; \quad R_1 = R. \quad (1.3.21)$$

1.3.4. Цилиндрические оболочки

Для цилиндрической оболочки, имеющей радиус R и $\theta = 0$ (см. рис. П1.6), кинематические соотношения (1.3.17) принимают следующий вид:

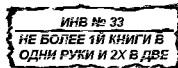
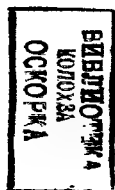
$$\begin{aligned} \Omega_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + w \right); \quad 2\Omega_{s\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial u}{\partial \varphi} + \frac{\partial v}{\partial s}; \\ \chi_{ss} &= \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}; \quad \chi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\gamma}{R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{w}{R^2}; \\ 2\chi_{s\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_s}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s}; \\ \Phi_{ss} &= 0; \quad \Phi_{\varphi\varphi} = \frac{1}{R^2} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\gamma}{R^2}; \\ 2\Phi_{s\varphi} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\Omega_{s3} &= \gamma_s + \frac{\partial \omega}{\partial s}; \\
2\Omega_{\varphi 3} &= \gamma_\varphi + \frac{1}{R} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{v}{R}; \quad \kappa_{s3} = \frac{\partial \gamma}{\partial s}; \\
\kappa_{\varphi 3} &= \frac{1}{R} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad \Omega_{33} = \gamma.
\end{aligned} \tag{1.3.22}$$

1.3.5. Конические оболочки

Для конической оболочки радиус параллели r — линейная функция от z , а угол наклона меридиана к оси вращения $\theta = \text{const}$ (см. рис. П1.5). В этом случае кинематические соотношения (1.3.17) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}
\Omega_{ss} &= \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \Omega_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \sin \theta + \omega \cos \theta \right); \\
2\Omega_{s\varphi} &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi} - v \sin \theta \right) + \frac{\partial v}{\partial s}; \\
\kappa_{ss} &= \frac{\partial \gamma_s}{\partial s}; \\
\kappa_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_s \sin \theta + \gamma \cos \theta + \right. \\
&\quad \left. + \frac{\cos \theta}{r} \left(\frac{\partial v}{\partial \varphi} + u \sin \theta + \omega \cos \theta \right) \right]; \\
2\kappa_{s\varphi} &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial \gamma_s}{\partial \varphi} - \gamma_\varphi \sin \theta + \frac{\partial v}{\partial s} \cos \theta \right] + \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s}; \\
\Phi_{ss} &= 0; \quad \Phi_{\varphi\varphi} = \frac{\cos \theta}{r^2} \left[\frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \gamma_s \sin \theta + \gamma \cos \theta \right]; \\
2\Phi_{s\varphi} &= \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial s}; \\
2\Omega_{s3} &= \gamma_s + \frac{\partial \omega}{\partial s}; \\
2\Omega_{\varphi 3} &= \gamma_\varphi + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \varphi} - \frac{\cos \theta}{r} v; \\
\kappa_{s3} &= \frac{\partial \gamma}{\partial s}; \quad \kappa_{\varphi 3} = \frac{1}{r} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; \quad \Omega_{33} = \gamma.
\end{aligned} \tag{1.3.23}$$



1.3.6. Пластины в декартовых координатах

Для пластины в декартовых координатах $x^1=x$; $x^2=y$ все символы Кристоффеля и кривизны равны нулю и метрический тензор равен единичному тензору. Соотношения для деформаций (1.3.12) в этом случае принимают следующий вид ($u=v_{(1)}$; $v=v_{(2)}$; $\gamma_x=\gamma_{(1)}$; $\gamma_y=\gamma_{(2)}$):

$$\begin{aligned}\Omega_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; & \Omega_{yy} &= \frac{\partial v}{\partial y}; & 2\Omega_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_{xx} &= \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; & \chi_{yy} &= \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}; & 2\chi_{xy} &= \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}; \\ \Phi_{xx} &= \Phi_{yy} = 2\Phi_{xy} = 0; \\ 2\Omega_{xz} &= \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}; & 2\Omega_{yz} &= \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \kappa_{xz} &= \frac{\partial \gamma}{\partial x}; & \kappa_{yz} &= \frac{\partial \gamma}{\partial y}; & \Omega_{zz} &= \gamma.\end{aligned}\quad (1.3.24)$$

1.3.7. Пластины в полярных координатах

Для пластины в полярных координатах $x^1=\rho$; $x^2=\varphi$ соотношения для деформаций (1.3.12) принимают следующий вид ($u=v_{(1)}$; $v=v_{(2)}$; $\gamma_\rho=\gamma_{(1)}$; $\gamma_\varphi=\gamma_{(2)}$):

$$\begin{aligned}\Omega_{\rho\rho} &= \frac{\partial u}{\partial \rho}; & \Omega_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial v}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} u; \\ 2\Omega_{\rho\varphi} &= \frac{\partial v}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial u}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} v; \\ \chi_{\rho\rho} &= \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho}; & \chi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho} \gamma_\rho; \\ 2\chi_{\rho\varphi} &= \frac{\partial \gamma_\varphi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \gamma_\varphi; \\ 2\Omega_{\rho z} &= \gamma_\rho + \frac{\partial w}{\partial \rho}; & 2\Omega_{\varphi z} &= \gamma_\varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial w}{\partial \varphi}; \\ \kappa_{\rho z} &= \frac{\partial \gamma}{\partial \rho}; & \kappa_{\varphi z} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial \gamma}{\partial \varphi}; & \Omega_{zz} &= \gamma.\end{aligned}\quad (1.3.25)$$

1.3.8. Балки при плоском изгибе

При изгибе балки в одной плоскости ($x^1 = x$) соотношения для деформаций (1.3.12) принимают следующий вид:

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \quad 2\Omega_{xz} = \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \kappa_{xz} = \frac{\partial \gamma}{\partial x}; \quad \Omega_{zz} = \gamma. \quad (1.3.26)$$

Таким образом, получены кинематические соотношения теории типа Тимошенко для различных наиболее часто употребляемых конструкций. Для любых других форм оболочек соотношения для деформаций могут быть легко получены из общих тензорных соотношений (1.3.12) при помощи геометрических зависимостей, приведенных в приложении 1.

При выводе основных соотношений метода конечных элементов кинематические соотношения оболочек удобно записывать в матричном виде. Для пологих оболочек (без учета деформаций $\Phi_{\alpha\beta}$ и $\kappa_{\alpha\beta}$) они принимают вид

$$\epsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}. \quad (1.3.27)$$

Здесь $\mathbf{u}^T = \{v_{(1)}, v_{(2)}, w, \gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma\}$ — матрица физических компонент перемещений (для балки $\mathbf{u}^T = \{w, \gamma_x, \gamma\}$); $\epsilon^T = \{\Omega_{(11)}, \Omega_{(22)}, \Omega_{(33)}, 2\Omega_{(23)}, 2\Omega_{(13)}, 2\Omega_{(12)}, \chi_{(11)}, \chi_{(22)}, 2\chi_{(12)}\}$ — матрица деформаций (для балки $\epsilon^T = \{\Omega_{(33)}, 2\Omega_{xz}, \chi_{xx}\}$); $\mathbf{L}$ — матрица операторов дифференцирования размером 9×6 , которая имеет конкретный вид для каждой координатной системы (для балки матрица $\mathbf{L}$ имеет размер 3×3). Например, для цилиндрической оболочки (соотношения (1.3.22)) матрица $\mathbf{L}$ имеет следующий вид:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{R} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{R} & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{R^2} & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{1}{R} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial \varphi} & \frac{\partial}{\partial s} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.28)$$

1.4. ЭНЕРГИЯ ДЕФОРМАЦИИ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

При решении задач деформирования оболочек вариационными методами в различных модификациях минимизируемые функционалы содержат энергию деформаций. Рассмотрим вывод функционала энергии деформаций в линейной теории оболочек типа Тимошенко. При выводе двумерного функционала исходим из функционала энергии деформаций трехмерного тела:

$$U = \int_V U_0 dV = \frac{1}{2} \int_V \sigma^{ij} e_{ij} dV. \quad (1.4.1)$$

Здесь dV — элемент объема оболочки, который в системе нормальных криволинейных координат $\{x^\alpha; x_3\}$ выражается в виде:

$$dV = \mu dx_3 dS; \quad dS = \sqrt{a} dx^1 dx^2;$$

$$\begin{aligned} a &= \det(a_{\alpha\beta}); \quad \mu = \det(\mu_{\beta^\alpha}) = \sqrt{\frac{g}{a}} = \\ &= 1 - 2x_3 H + (x_3)^2 K; \quad g = \det(g_{ij}). \end{aligned} \quad (1.4.2)$$

Подставляя (1.3.11) и (1.4.2) в энергию деформаций (1.4.1), получаем двумерный функционал:

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_S \{N^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + 2Q^\alpha \Omega_{\alpha 3} + \\ &+ N^{33} \Omega_{33} + M_{(2)}^{\alpha\beta} \Phi_{\alpha\beta} + M^{\alpha 3} \chi_{\alpha 3}\} dS. \end{aligned} \quad (1.4.3)$$

Здесь введены тензоры усилий $N^{\alpha\beta}$, моментов $M^{\alpha\beta}$, поперечных сил Q^α , усилия обжатия нормали N^{33} , а также моменты высших порядков $M_{(2)}^{\alpha\beta}$ и $M^{\alpha 3}$:

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{\alpha\beta} dx_3; \\ M^{\alpha 3} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{\alpha 3} x_3 dx_3; \\ Q^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{\alpha 3} dx_3; \end{aligned}$$

$$N^{33} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{33} dx_3; \quad M_{(2)}^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{\alpha\beta} (x_3)^2 dx_3;$$

$$M^{\alpha\beta} = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma^{\alpha\beta} x_3 dx_3; \quad (1.4.4)$$

Рассматривая вариант пологих оболочек, у которых $h/R_{\min} \ll 1$, где $R_{\min} = \min[R_1, R_2]$, в функционале (1.4.3) пренебрегаем последними двумя слагаемыми, а в соотношениях (1.4.4), определяющих усилия и моменты, принимаем $\mu = 1$. В этом случае функционал (1.4.3) имеет следующий вид:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{N^{\alpha\beta} \Omega_{\alpha\beta} + M^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} +$$

$$+ 2Q^{\alpha} \Omega_{\alpha 3} + N^{33} \Omega_{33}\} dS. \quad (1.4.5)$$

При этом для пологих оболочек тензоры усилий $N^{\alpha\beta}$ и моментов $M^{\alpha\beta}$ симметричны. Далее вводим матричные обозначения для физических компонент усилий, моментов, поперечных сил и деформаций:

$$\sigma^T = \{N_{(11)}, N_{(22)}, N_{(33)}, Q_{(2)}, Q_{(1)}, N_{(12)}, M_{(11)}, M_{(22)}, M_{(12)}\};$$

$$\varepsilon^T = \{\Omega_{(11)}, \Omega_{(22)}, \Omega_{(33)}, 2\Omega_{(23)}, 2\Omega_{(13)}, 2\Omega_{(12)}, \chi_{(11)}, \chi_{(22)}, 2\chi_{(12)}\}. \quad (1.4.6)$$

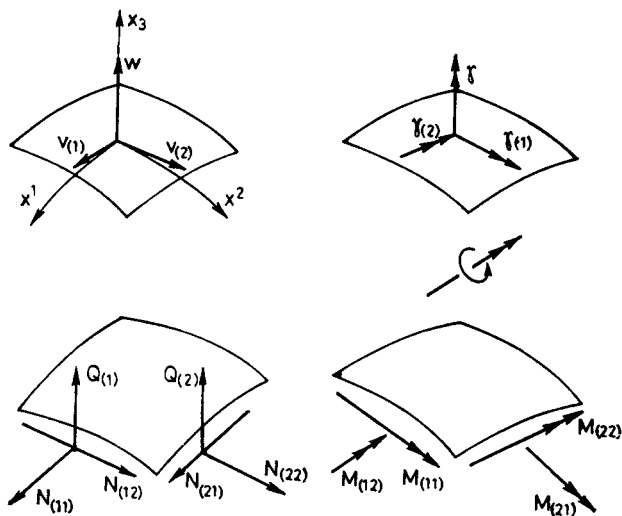


Рис. 1.3. Положительные направления перемещений, поворотов, усилий, моментов и поперечных сил

Положительные направления перемещений, поворотов, усилий, моментов и поперечных сил показаны на рис. 1.3. Функционал (1.4.5) в матричной записи с учетом обозначений (1.4.6) принимает вид

$$U = \frac{1}{2} \int_S \sigma^T \varepsilon dS. \quad (1.4.7)$$

Энергию деформаций далее следует выражать через деформации и перемещения. Для этого необходимо использовать закон связи напряжений с деформациями и найти связь между интегральными усилиями и деформациями оболочки. Эти соотношения будут определены в следующем параграфе.

1.5. ФИЗИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК

Рассмотрим многослойную оболочку из линейно-упругого материала, подчиняющегося закону Гука. Слои оболочки имеют различную жесткость, и, таким образом, упругие свойства оболочки меняются по нормальной координате x_3 . Кроме того, примем, что слои имеют плоскость симметрии $x_3 = \text{const}$, параллельную срединной поверхности. Упругие свойства материала оболочки характеризуются тензором жесткости $\mathbf{A}$. Его можно разложить на компоненты в пространственном базисе $\mathbf{g}_i$:

$$\mathbf{A} = \bar{A}^{ijkl} \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l.$$

Такое же разложение тензора $\mathbf{A}$ на компоненты можно осуществить в базисе срединной поверхности $\{\mathbf{a}_\alpha; \mathbf{a}_3\}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = & A^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{a}_\gamma \otimes \mathbf{a}_\delta + \\ & + A^{\alpha 3\beta 3} \mathbf{a}_\alpha \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_\beta \otimes \mathbf{a}_3 + \\ & + A^{3333} \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3 \otimes \mathbf{a}_3. \end{aligned}$$

Используя формулы (П1.6) и (П1.17), можно найти связь между компонентами тензоров в пространственном базисе и в базисе срединной поверхности. Для произвольного тензора $\mathbf{T}$ ранга $(r+s)$ подобные соотношения имеют следующий вид:

$$\bar{T}_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} = T_{\tau_1 \dots \tau_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} (\mu^{-1})_{\nu_1}^{\beta_1} \dots (\mu^{-1})_{\nu_s}^{\beta_s} \mu_{\alpha_1}^{\tau_1} \dots \mu_{\alpha_r}^{\tau_r}. \quad (1.5.1)$$

В случае непологих оболочек при выводе физических соотношений должны быть учтены различия между компонентами тензоров в базисе пространства и в базисе срединной поверхности. Подобный вывод соотношений для непологих оболочек приве-

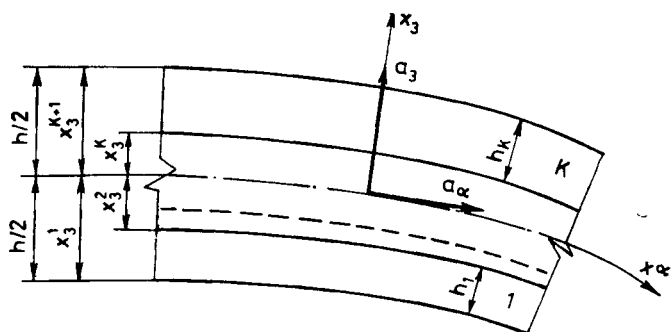


Рис. 1.4. Структура многослойной оболочки

ден в работах [62, 64, 128 и др.]. В большинстве практических случаев в расчетах можно использовать вариант физических соотношений для пологих оболочек. В этом случае $h/R_{\min} \ll 1$ и в формуле (П1.7) $\mu_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha}$, а в формуле (П1.13) $\mu = 1$. Тогда согласно (1.5.1) нет различий между компонентами тензоров в базисе срединной поверхности и в пространственном базисе на эквидистантных поверхностях. В этом случае закон Гука для любого слоя оболочки имеет вид

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}. \quad (1.5.2)$$

Рассмотрим физические соотношения для многослойной оболочки (рис. 1.4), состоящей из K слоев различной жесткости. Принимаем, что каждый слой имеет постоянную жесткость вдоль координаты x_3 , но она может быть переменной вдоль координат x^{α} . Кинематические соотношения (1.3.11) и (1.3.12) для пологих оболочек могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha\beta} + x_3 \chi_{\alpha\beta}; \\ e_{\alpha 3} &= \Omega_{\alpha 3}; \\ e_{33} &= \Omega_{33}, \end{aligned} \quad (1.5.3)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (\epsilon_{\alpha\beta} + \epsilon_{\beta\alpha}); \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} (k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}); \\ 2\Omega_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha} + \Psi_{\alpha}; \\ \Omega_{33} &= \gamma. \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

Подставляя (1.5.2), (1.5.3) и (1.5.4) в соотношения (1.4.4), получаем следующие физические соотношения:

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= Q^{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta} + Q^{\alpha\beta 33}\Omega_{33}; \\ M^{\alpha\beta} &= B^{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega_{\gamma\delta} + D^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta 33}\Omega_{33}; \\ Q^{\alpha} &= 2Q^{\alpha 3\beta 3}\Omega_{\alpha\beta}; \\ N^{33} &= Q^{3333}\Omega_{33} + Q^{33\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta} + B^{33\alpha\beta}\chi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (1.5.5)$$

Здесь введены следующие обозначения для тензоров мембранной жесткости $\mathbf{Q}$, изгибной жесткости $\mathbf{D}$ и мембранно-изгибной жесткости $\mathbf{B}$:

$$(\mathbf{Q}, \mathbf{B}, \mathbf{D}) = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{A}(1, x_3, (x_3)^2) dx_3. \quad (1.5.6)$$

После интегрирования имеем следующие выражения для вычисления эффективных жесткостей многослойной оболочки из жесткостей $\mathbf{A}_{(k)}$ отдельных слоев:

$$\begin{aligned} Q^{\alpha\beta\lambda\delta} &= \sum_{k=1}^K A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(k)} [x_{3(k+1)} - x_{3(k)}]; \\ Q^{\alpha\beta 33} &= \sum_{k=1}^K A^{\alpha\beta 33}_{(k)} [x_{3(k+1)} - x_{3(k)}]; \\ Q^{3333} &= \sum_{k=1}^K A^{3333}_{(k)} [x_{3(k+1)} - x_{3(k)}]; \\ Q^{\alpha 3\beta 3} &= \sum_{k=1}^K A^{\alpha 3\beta 3}_{(k)} [x_{3(k+1)} - x_{3(k)}]; \\ B^{\alpha\beta\lambda\delta} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(k)} [x_{3(k+1)}^2 - x_{3(k)}^2]; \\ B^{\alpha\beta 33} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K A^{\alpha\beta 33}_{(k)} [x_{3(k+1)}^2 - x_{3(k)}^2]; \\ D^{\alpha\beta\lambda\delta} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K A^{\alpha\beta\gamma\delta}_{(k)} [x_{3(k+1)}^3 - x_{3(k)}^3]. \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

Тензоры эффективных жесткостей многослойной оболочки $\mathbf{Q}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{D}$ согласно (1.5.7) имеют такие же свойства симметрии, как тензор жесткости $\mathbf{A}$, т. е. эти тензоры симметричны по перестановке пар индексов и по перестановке индексов внутри каждой пары. Так как при выводе основных соотношений метода конечных элементов используется матричная запись, переход на матричные компоненты тензоров эффективных жесткостей проводится по общепринятому правилу: $11 \rightarrow 1$; $22 \rightarrow 2$; $33 \rightarrow 3$; $23 \rightarrow 4$; $13 \rightarrow 5$; $12 \rightarrow 6$. В матричной записи физические соотношения (1.5.5) имеют вид

$$\sigma = \mathbf{D}\varepsilon. \quad (1.5.8)$$

Здесь $\mathbf{D}$ — матрица эффективных жесткостей многослойной оболочки:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & Q_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & Q_{26} & B_{21} & B_{22} & B_{26} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 & B_{31} & B_{32} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Q_{61} & Q_{62} & 0 & 0 & 0 & Q_{66} & 0 & 0 & B_{66} \\ B_{11} & B_{21} & B_{31} & 0 & 0 & 0 & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} & 0 & 0 & 0 & D_{21} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 & 0 & 0 & B_{66} & D_{61} & D_{62} & D_{66} \end{bmatrix}$$

Отметим, что эта матрица записана для случая, когда каждый слой оболочки в качестве плоскости упругой симметрии имеет срединную поверхность слоя.

Подставляя физические соотношения (1.5.8) в функционал (1.4.7), получаем энергию деформаций многослойной оболочки, выраженную через деформации:

$$U = \frac{1}{2} \int_S \varepsilon^T \mathbf{D} \varepsilon dS. \quad (1.5.9)$$

Энергия деформаций (1.5.9) входит как слагаемое в функционалы типа Лагранжа при построении основных соотношений метода конечных элементов.

1.6. РАБОТА ВНЕШНИХ СИЛ

Рассмотрим вывод функционала работы внешних сил для решения линейных задач деформирования оболочек. Внешние силы разделяются на силы, которые приложены к срединной поверх-

ности S , и силы, которые приложены к контуру s оболочки. Полную работу определяем в виде суммы работ этих сил:

$$W = W_q + W_c + W_P + W_M. \quad (1.6.1)$$

Здесь W_q — работа внешних распределенных сил на срединной поверхности; W_c — работа внешних распределенных сил на контуре оболочки; W_P — работа сосредоточенных сил; W_M — работа сосредоточенных моментов. Работа внешних сил на срединной поверхности без учета распределенных моментов определяется в виде [99]

$$W_q = \int_S \mathbf{q} \cdot \mathbf{v} dS. \quad (1.6.2)$$

Здесь $\mathbf{v} = v^\alpha \mathbf{a}_\alpha + w \mathbf{a}_3$ — вектор перемещений срединной поверхности; $\mathbf{q}$ — вектор распределенных внешних сил на срединной поверхности, который разлагается на компоненты:

$$\mathbf{q} = q^\alpha \mathbf{a}_\alpha + q_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.6.3)$$

Вектор $\mathbf{q}$ можно разложить также на физические компоненты в нормированном единичном базисе:

$$\mathbf{q} = q_{(\alpha)} \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} + q_3 \mathbf{a}_3. \quad (1.6.4)$$

Здесь $q_{(\alpha)}$ — распределенная нагрузка в направлении осей x^α ; q — распределенная нагрузка в направлении нормали. Сравнивая (1.6.3) и (1.6.4), находим связь между физическими и тензорными компонентами вектора распределенных сил:

$$q_{(\alpha)} = q^\alpha \sqrt{a_{\alpha\alpha}}; \quad q = q_3. \quad (1.6.5)$$

С учетом (П1.9) и (1.6.3) работу внешних распределенных сил (1.6.2) можно записать через компоненты векторов перемещений и внешних сил:

$$W_q = \int_S \{q_{(\alpha)} v_{(\alpha)} + q w\} dS. \quad (1.6.6)$$

Работа внешних сил, приложенных на контуре оболочки (рис. 1.5), определяется в виде интеграла [99]

$$W_c = \int_s \{\mathbf{N}_* \cdot \mathbf{v} + \mathbf{M}_* \cdot \boldsymbol{\theta}\} ds. \quad (1.6.7)$$

Здесь Θ — вектор поворота в плоскости оболочки, который определяется через вектор градиента деформаций

$$\gamma = \gamma_\alpha a^\alpha + \gamma_{a_3} \quad (1.6.8)$$

в виде

$$\Theta = a_3 \times \gamma. \quad (1.6.9)$$

С учетом соотношения [99]

$$a_3 \times a^\lambda = \varepsilon_*^{\lambda\alpha} a_\alpha \quad (1.6.10)$$

выражение для вектора поворота (1.6.9) принимает вид

$$\Theta = \gamma_\alpha \varepsilon_*^{\lambda\alpha} a_\lambda = \Theta^\lambda a_\lambda, \quad (1.6.11)$$

где $\Theta^\lambda = \gamma_\alpha \varepsilon_*^{\lambda\alpha}$. В функционале работы внешних сил на контуре (1.6.7) N_* и M_* означают заданные векторы усилий и моментов на единицу длины контура. Обозначим через s единичный вектор касательной к контуру, через v единичный вектор нормали к контуру (рис. 1.6) и разложим вектор нормали на компоненты в координатном базисе:

$$v = v^\alpha a_\alpha. \quad (1.6.12)$$

Векторы усилий N_* и моментов M_* можно разделить на компоненты по координатным осям [99]:

$$\begin{aligned} N_* &= \sum_\alpha v_\alpha N^*_\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}}; \\ M_* &= \sum_\alpha v_\alpha M^*_\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}}. \end{aligned} \quad (1.6.13)$$

Здесь компоненты векторов усилий и моментов на координатные

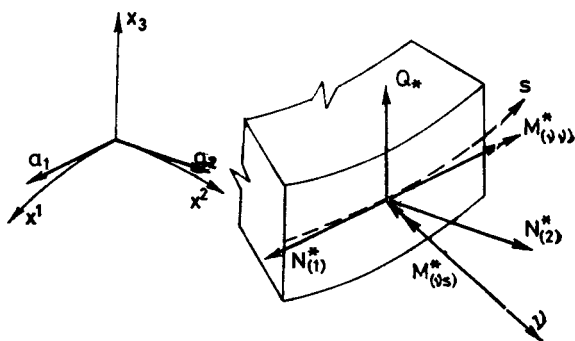


Рис. 1.5. Внешние силы на контуре оболочки

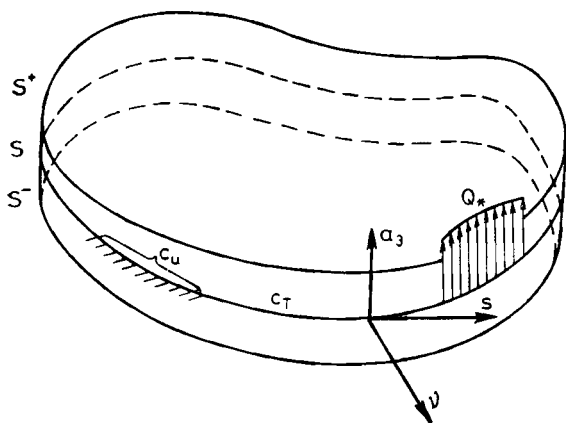


Рис. 1.6. Векторы нормалей и касательной к контуру оболочки

оси связаны с компонентами тензоров усилий, моментов и поперечных сил зависимостями [99]

$$\begin{aligned} N_*^\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}} &= N_*^{\alpha\lambda} a_\lambda + Q_*^\alpha a_3; \\ M_*^\alpha \sqrt{a^{\alpha\alpha}} &= M_*^{\alpha\lambda} a_3 \times a_\lambda. \end{aligned} \quad (1.6.14)$$

Здесь тензорные компоненты усилий, моментов и поперечных сил определяются по зависимостям, которые аналогичны формулам (1.4.4):

$$\begin{aligned} N_*^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma_*^{\alpha\beta} dx_3; \\ M_*^{\alpha\beta} &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma_*^{\alpha\beta} x_3 dx_3; \\ Q_*^\alpha &= \int_{-h/2}^{h/2} \mu \sigma_*^{\alpha 3} dx_3. \end{aligned} \quad (1.6.15)$$

Здесь σ_*^{ij} — заданные компоненты тензора напряжений на граничном контуре оболочки. Разложим заданные векторы усилий и моментов на границе на компоненты (см. рис. 1.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_* &= M_{*(v\gamma)} [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{v}] - M_{*(v\beta)} \mathbf{v}; \\ \mathbf{N}_* &= N_*^{(\alpha)} \frac{\mathbf{a}_\alpha}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}} + Q_* \mathbf{a}_3. \end{aligned} \quad (1.6.16)$$

Здесь $M^*_{(vv)}$ и $M^*_{(vs)}$ — физические компоненты вектора момента по касательной к контуру (заданный изгибающий момент) и по нормали к контуру (заданный крутящий момент). Используя формулы (П1.9), (1.6.10) и (1.6.12)—(1.6.14) из (1.6.16), получаем следующие выражения для заданных физических усилий и моментов на контуре оболочки:

$$\begin{aligned} M^*_{(vv)} &= \mathbf{M}_* \cdot [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{v}] = M_*^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta; \\ M^*_{(vs)} &= -\mathbf{M}_* \cdot \mathbf{v} = -\varepsilon^*_{\beta\lambda} M_*^{\alpha\beta} v_\alpha v^\lambda = \varepsilon^*_{\lambda\beta} M_*^{\alpha\beta} v_\alpha v^\lambda; \\ Q_* &= Q_*^\alpha v_\alpha; \quad N_*^{(\alpha)} = \sqrt{a_{\alpha\alpha} v_\lambda} N_*^{\lambda\alpha}; \\ N_*^\alpha &= v_\lambda N_*^{\lambda\alpha}. \end{aligned} \quad (1.6.17)$$

Здесь использована формула [99]

$$\varepsilon_*^{\alpha\beta} \varepsilon^*_{\lambda\beta} = \delta_\lambda^\alpha. \quad (1.6.18)$$

С учетом этих формул преобразуем первое слагаемое в подынтегральном выражении (1.6.7):

$$\mathbf{N}_* \cdot \mathbf{v} = N_*^\alpha v_\alpha + Q_* \omega = v_\lambda N_*^{\lambda\alpha} v_\alpha + v_\alpha Q_*^\alpha \omega. \quad (1.6.19)$$

Разложим вектор поворота Θ (1.6.9) на физические компоненты на границе контура:

$$\Theta = \Theta_{(v)} [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{v}] - \Theta_{(s)} \mathbf{v}. \quad (1.6.20)$$

Здесь $\Theta_{(v)}$ — поворот вокруг касательной $\mathbf{s}$ к контуру, положительное направление которого совпадает с положительным направлением момента $M^*_{(vv)}$ (см. рис. 1.5); $\Theta_{(s)}$ — поворот вокруг единичной нормали $\mathbf{v}$ к контуру. Положительное направление этого поворота совпадает с положительным направлением крутящего момента $M^*_{(vs)}$ на контуре. С учетом (1.6.11), (1.6.12), (1.6.18) и (1.6.20) физические компоненты вектора поворота на контуре определяются в виде

$$\begin{aligned} \Theta_{(v)} &= \Theta \cdot [\mathbf{a}_3 \times \mathbf{v}] = \gamma_\alpha v^\alpha; \\ \Theta_{(s)} &= -\Theta \cdot \mathbf{v} = -\gamma_\alpha \varepsilon_*^{\alpha\lambda} v_\lambda = \gamma_\alpha \varepsilon_*^{\lambda\alpha} v_\lambda. \end{aligned} \quad (1.6.21)$$

Второе слагаемое в интеграле работы внешних сил (1.6.7) с учетом (1.6.16), (1.6.17), (1.6.20) и (1.6.21) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_* \cdot \Theta &= M^*_{(vv)} \Theta_{(v)} + M^*_{(vs)} \Theta_{(s)} = \\ &= M_*^{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta \gamma_\lambda v^\lambda + \varepsilon^*_{\lambda\beta} M_*^{\alpha\beta} v_\alpha v^\lambda \gamma_\tau \varepsilon_*^{\sigma\tau} v_\rho. \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

Окончательно функционал работы внешних сил на контуре

оболочки (1.6.7) с учетом (1.6.17), (1.6.19) и (1.6.22) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} W_c = \int_{c_T} (\nu_\lambda N_*^{\lambda\alpha} v_\alpha + \nu_\alpha Q_*^\alpha \omega + \\ + M_*^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu_\beta \gamma_\lambda \nu^\lambda + \varepsilon^*_{\lambda\beta} M_*^{\alpha\beta} \nu_\alpha \nu^\lambda \gamma_\tau \varepsilon^*_{\tau\rho} \nu^\rho) ds = \\ = \int_{c_T} (N_*^\alpha v_\alpha + Q_* \omega + M^*_{(\nu\nu)} \nu^\alpha \gamma_\alpha + M^*_{(\nu s)} \varepsilon^*_{\tau\alpha} \nu^\tau \gamma_\alpha) ds. \end{aligned} \quad (1.6.23)$$

Здесь c_T — часть контура, на которую заданы внешние силы (см. рис. 1.6). Из функционала (1.6.23) можно получить частные случаи интеграла работы на границах контура $x^1 = \text{const}$ и $x^2 = \text{const}$. На контуре $x^1 = \text{const}$ элемент длины контура

$$ds = \sqrt{a_{22}} dx^2. \quad (1.6.24)$$

На контуре $x^2 = \text{const}$ элемент длины контура

$$ds = \sqrt{a_{11}} dx^1. \quad (1.6.25)$$

На контуре $x^1 = \text{const}$ интеграл работы (1.6.23) с учетом $\nu_{(1)} = 1$, $\nu_{(2)} = 0$, $a_{22} = aa^{11}$, формул (П1.18), (П1.24) и (1.6.24) принимает вид

$$\begin{aligned} W_c = \int_{c_T} (N^*_{(11)} v_{(1)} + N^*_{(12)} v_{(2)} + Q^*_{(1)} \omega + \\ + M^*_{(11)} \gamma_{(1)} + M^*_{(12)} \gamma_{(2)}) \sqrt{a_{22}} dx^2. \end{aligned} \quad (1.6.26)$$

Таким же образом из (1.6.23) получаем интеграл работы на контуре $x^2 = \text{const}$:

$$\begin{aligned} W_c = \int_{c_T} (N^*_{(21)} v_{(1)} + N^*_{(22)} v_{(2)} + Q^*_{(2)} \omega + \\ + M^*_{(21)} \gamma_{(1)} + M^*_{(22)} \gamma_{(2)}) \sqrt{a_{11}} dx^1. \end{aligned} \quad (1.6.27)$$

Кроме того, к оболочке в точке $x^\alpha = x_*^\alpha$ может быть приложена сосредоточенная сила

$$P = P_{(\alpha)} \frac{a_\alpha}{\sqrt{a_{\alpha\alpha}}} + P_{(3)} a_3, \quad (1.6.28)$$

где $P_{(\alpha)}$, $P_{(3)}$ — физические компоненты вектора сосредоточенных сил в направлении координатных осей. Эти силы совершают работу

$$W_P = P_{(\alpha)} v_{(\alpha)} (x^\alpha = x_*^\alpha) + P_{(3)} \omega (x^\alpha = x_*^\alpha). \quad (1.6.29)$$

К оболочке могут быть приложены также сосредоточенные моменты $\mathfrak{M}_{(1)}$ и $\mathfrak{M}_{(2)}$ в направлении осей x^1 и x^2 соответственно. Они совершают работу на углы поворота $\Theta_{(\alpha)}$

$$W_{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}_{(\alpha)} \Theta_{(\alpha)} (x^\alpha = x_*^\alpha). \quad (1.6.30)$$

Момент относительно оси x^3 может быть представлен в виде пары сил, приложенных в плоскости оболочки.

Таким образом, формулы (1.6.6), (1.6.23), (1.6.29) и (1.6.30) определяют все слагаемые работы внешних сил (1.6.1). Этот функционал будет использован далее при составлении вариационных уравнений метода конечных элементов.

Для вывода основных соотношений метода конечных элементов функционалы работы (1.6.6), (1.6.23) и (1.6.27) удобно записать в матричном виде. Функционал работы распределенных сил на срединной поверхности (1.6.6) в матричной записи имеет вид

$$W_q = \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{R}^T \mathbf{q} dS. \quad (1.6.31)$$

Здесь $\mathbf{q}^T = \{q_{(1)}, q_{(2)}, q\}$ — матрица распределенных нагрузок; $\mathbf{R}$ — булева матрица:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Функционал (1.6.26) в матричной записи имеет вид

$$W_c = \int_{c_T} \mathbf{u}^T \mathbf{R}_1 \sigma_* \sqrt{a_{22}} dx^2. \quad (1.6.32)$$

Здесь σ_* — матрица заданных внешних усилий, моментов и поперечных сил на границе, которая определена в (1.4.6); $\mathbf{R}_1$ — булева матрица:

$$\mathbf{R}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Аналогично (1.6.32) в матричном виде записывается функционал работы внешних сил на контуре $x^2 = \text{const}$ (1.6.27).

1.7. КИНЕТИЧЕСКАЯ ЭНЕРГИЯ

Вариационные уравнения для решения задач динамики содержат функционал кинетической энергии. Функционал кинетической энергии T многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко получаем, как и предыдущие, из трехмерного функционала:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}} \cdot \dot{\mathbf{u}} dV. \quad (1.7.1)$$

Здесь ρ — плотность материала, являющаяся функцией координат. Используя в (1.7.1) гипотезу Тимошенко (1.3.3), с учетом (1.4.2) имеем следующий двумерный функционал кинетической энергии многослойной оболочки:

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \int_S \{ \rho_0 \dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{v}} + \rho_1 (\dot{\mathbf{v}} \cdot \dot{\mathbf{\gamma}} + \dot{\mathbf{\gamma}} \cdot \dot{\mathbf{v}}) + \rho_2 \dot{\mathbf{\gamma}} \cdot \dot{\mathbf{\gamma}} \} dS = \\ = & \frac{1}{2} \int_S \{ \rho_0 (\dot{v}^\alpha \dot{v}_\alpha + \dot{w} \dot{w}) + \rho_1 (\dot{v}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \dot{w} \dot{\gamma} + \dot{\gamma}^\alpha \dot{v}_\alpha + \\ & + \dot{\gamma} \dot{w}) + \rho_2 (\dot{\gamma}^\alpha \dot{\gamma}_\alpha + \dot{\gamma} \dot{\gamma}) \} dS. \end{aligned} \quad (1.7.2)$$

Здесь введены следующие обозначения для обобщенных плотностей:

$$\rho_i = \int_{-h/2}^{h/2} \mu \rho(x_3)^i dx_3, \quad i=0, 1, 2. \quad (1.7.3)$$

При K -слойной оболочке с плотностью k -го слоя ρ_k выражения для расчета плотностей ρ_i в случае непологих оболочек можно получать непосредственным интегрированием (1.7.3), подставляя в подынтегральное выражение μ из формулы (П1.13). В случае пологих оболочек при $\mu=1$ обобщенные плотности вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \sum_{k=1}^K \rho_k [x_{3(k+1)} - x_{3(k)}]; \\ \rho_1 &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^K \rho_k [x_{3(k+1)}^2 - x_{3(k)}^2]; \\ \rho_2 &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^K \rho_k [x_{3(k+1)}^3 - x_{3(k)}^3]. \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

Вводим матричные обозначения для физических компонент перемещений $\mathbf{v}$ и γ :

$$\begin{aligned}\mathbf{v}^T &= \{v_{(1)}, v_{(2)}, w\}; \\ \gamma^T &= \{\gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma\}; \\ \mathbf{u}^T &= \{\mathbf{v}^T, \gamma^T\}.\end{aligned}\quad (1.7.5)$$

В матричной записи функционал кинетической энергии (1.7.2) будет иметь вид

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2} \int_s \{\rho_0 \dot{\mathbf{v}}^T \dot{\mathbf{v}} + \rho_1 (\dot{\mathbf{v}}^T \dot{\gamma} + \dot{\gamma}^T \dot{\mathbf{v}}) + \\ &+ \rho_2 \dot{\gamma}^T \dot{\gamma}\} dS = \frac{1}{2} \int_s \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}} dS.\end{aligned}\quad (1.7.6)$$

Здесь матрица $\mathbf{R}$ содержит обобщенные плотности оболочки:

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} \rho_0 \mathbf{I} & \rho_1 \mathbf{I} \\ \rho_1 \mathbf{I} & \rho_2 \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (1.7.7)$$

где $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером 3×3 .

1.8. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ЛАГРАНЖА В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

В большинстве случаев задачи изгиба, устойчивости и динамики оболочек с применением метода конечных элементов решаются методом перемещений. Для задач статики метод перемещений преимущественно строится на основе принципа возможных перемещений или на основе принципа минимума потенциальной энергии. Для линейно-упругих тел при наличии потенциала внешних сил оба принципа приводят к тождественным соотношениям.

Полная потенциальная энергия тела Π определяется суммой энергии деформаций U и потенциала внешних сил A , который равен отрицательной работе $A = -W$:

$$\Pi = U + A = U - W. \quad (1.8.1)$$

Предполагается, что функционал потенциальной энергии зависит от перемещений $\mathbf{u}$, которые являются независимыми функциональными аргументами. В теории оболочек типа Тимошенко существует всего шесть обобщенных перемещений, для которых на границе оболочки c_u (см. рис. 1.6) заданы значения u_*

$$u = u_*; \quad c_u \in c. \quad (1.8.2)$$

Кроме того, предполагается, что деформации выражаются через перемещения по соотношениям (1.5.3), (1.5.4) и (1.3.10) и что заранее заданы физические соотношения (1.5.5). Согласно принципу минимума потенциальной энергии среди всех кинемати-

ческих допустимых перемещений, которые удовлетворяют граничным условиям (1.8.2), истинным полем перемещений будет то поле, которое приводит к минимуму потенциальной энергии (1.8.1). Условие минимума функционала определяется уравнениями

$$\delta\Pi = \delta U - \delta W = 0; \quad (1.8.3)$$

$$\delta^2\Pi = \delta^2 U - \delta^2 W > 0, \quad (1.8.4)$$

где варьирование функционалов проводится по обобщенным перемещениям δu . Так как функционал работы (1.6.1) в линейной теории оболочек линейно зависит от перемещений, а заданные внешние силы не зависят от них, $\delta^2 W = 0$. Энергия деформаций U (1.5.9) является квадратной формой перемещений. Вследствие того что матрица упругости D положительно определена, для линейных задач вторая вариация энергии деформации положительна ($\delta^2 U > 0$) и условие минимума (1.8.4) всегда выполняется. Таким образом, в линейных задачах необходимым и достаточным условием минимума потенциальной энергии является условие стационарности функционала (1.8.3), из которого определяется истинное поле перемещений.

Рассмотрим вариационное уравнение $\delta\Pi = 0$ линейной теории оболочек типа Тимошенко. Подставляя в энергию деформаций (1.4.5) вместо деформаций их выражения через обобщенные перемещения (1.5.3), (1.5.4), (1.3.10), с учетом симметричности тензоров усилий $N^{\alpha\beta}$ и моментов $M^{\alpha\beta}$ для пологих оболочек получаем

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{ N^{\alpha\beta} (v_{\alpha\parallel\beta} - b_{\alpha\beta} w) + M^{\alpha\beta} (\gamma_{\alpha\parallel\beta} - b_{\alpha\beta} \gamma) + \\ + Q^\alpha (w_{,\alpha} + v^\lambda b_{\lambda\alpha} + \gamma_\alpha) + N^{33} \gamma \} dS. \quad (1.8.5)$$

Подставляя варьированные по перемещениям функционалы (1.8.5), (1.6.6) и (1.6.23) в (1.8.3), после интегрирования по частям и группировки членов получаем

$$\delta\Pi = - \int_S \{ (N^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} - b_\lambda{}^\alpha Q^\lambda + q^\alpha) \delta v_\alpha + (b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + \\ + Q^\alpha_{\parallel\alpha} + q) \delta w + (M^{\alpha\beta}_{\parallel\beta} - Q^\alpha) \delta \gamma_\alpha + (N^{33} - b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}) \delta \gamma \} dS + \\ + \int_{c_T} \{ (N^{\alpha\beta} v_\beta - N_*^\alpha) \delta v_\alpha + (Q^\alpha v_\alpha - Q_*) \delta w + \\ + (M^{\alpha\beta} v_\beta - M^*_{(v\gamma)} v^\alpha - M^*_{(v\delta)} \varepsilon_*^{\tau\alpha} \gamma_\tau) \delta \gamma_\alpha \} dS = 0. \quad (1.8.6)$$

На части границы контура оболочки c_u заданы перемещения (1.8.2). Следовательно, здесь вариация перемещений $\delta u = 0$.

Таким образом, главными граничными условиями функционала (1.8.1) являются функции v^α , ω , γ^α , γ . В остальной части оболочки и на границе c_T (см. рис. 1.6), где заданы силовые граничные условия, $\delta u \neq 0$. Отсюда как условия минимума (уравнения Эйлера) функционала (1.8.6) следуют уравнения равновесия

$$N^{\alpha\beta}{}_{||\beta} - b_{\lambda}{}^{\alpha} Q^{\lambda} + q^{\alpha} = 0; \quad (1.8.7)$$

$$Q^{\alpha}{}_{||\alpha} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + q = 0; \quad (1.8.8)$$

$$M^{\alpha\beta}{}_{||\beta} - Q^{\alpha} = 0; \quad (1.8.9)$$

$$N^{33} = b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} \quad (1.8.10)$$

и естественные граничные условия на контуре c_T с нормалью $v = v^{\alpha} a_{\alpha}$

$$N^{\alpha\beta} v_{\beta} = N_{*}^{\alpha}; \quad (1.8.11)$$

$$Q^{\alpha} v_{\alpha} = Q_{*}; \quad (1.8.12)$$

$$M^{\alpha\beta} v_{\beta} = M_{(vv)}^{*} v^{\alpha} + M_{(vs)}^{*} e_{*}^{\tau\alpha} v_{\tau}. \quad (1.8.13)$$

Граничные условия (1.8.13) после преобразования можно также записать в виде

$$M^{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta} = M_{(vv)}^{*};$$

$$M^{\alpha\beta} e_{*}^{\tau\beta} v^{\tau} v_{\alpha} = M_{(vs)}^{*}. \quad (1.8.14)$$

При формулировке соотношений метода конечных элементов на основе принципа минимума потенциальной энергии или на основе других вариационных принципов, для которых уравнения равновесия являются уравнениями Эйлера вариационной задачи, уравнения равновесия (1.8.7)—(1.8.10) для решения не используются. При приближенной минимизации функционала уравнения равновесия, а также естественные граничные условия удовлетворяются приближенно. В некоторых формах метода конечных элементов, например в методе Галеркина, методе наименьших квадратов и др., уравнения равновесия используются для составления вариационного уравнения.

1.9. ВАРИАЦИОННОЕ УРАВНЕНИЕ ГАМИЛЬТОНА—ОСТРОГРАДСКОГО В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

При решении динамических задач, когда внешние силы имеют потенциал, для упругих тел используется вариационный принцип Гамильтона—Остроградского. Математически вариационное уравнение этого принципа записывается в виде

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt = 0, \quad (1.9.1)$$

или $\delta H = 0$, где $H = \int_{t_1}^{t_2} (T - U + W) dt$ — действие по Гамильтону.

В (1.9.1) вариация осуществляется по перемещениям δu . В линейной теории оболочек типа Тимошенко кинетическая энергия T определяется функционалом (1.7.2), энергия деформаций U — функционалом (1.8.5), а работа внешних сил $W = W_q + W_c$ — суммой функционалов (1.6.6) и (1.6.23).

Согласно вариационному принципу Гамильтона—Остроградского в процессе движения тела на отрезке времени между моментами t_1 и t_2 среди кинематически допустимых перемещений, которые удовлетворяют геометрическим граничным условиям на границе тела c_u и которые заданы в начальный $t = t_1$ и конечный $t = t_2$ моменты времени, истинными будут те перемещения, которые приводят функционал H к стационарному значению.

Вариационное уравнение (1.9.1) перепишем в виде

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta U + \delta W) dt = \int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta \Pi) dt = 0. \quad (1.9.2)$$

Вариации по перемещениям энергии деформации δU и работы внешних сил δW были получены в предыдущем параграфе и определялись уравнением (1.8.6). Обратимся к интегралу по времени от вариации кинетической энергии (1.7.2) оболочки:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ \rho_0 \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \frac{1}{2} \rho_1 \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial \gamma^\alpha}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial v_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) \right] + \right. \\ & \left. + \rho_2 \left[\frac{\partial \gamma^\alpha}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \gamma_\alpha}{\partial t} \right) + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \delta \left(\frac{\partial \gamma}{\partial t} \right) \right] \right\} dS dt. \end{aligned}$$

В результате интегрирования по частям находим

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = & \int_S \left\{ \rho_0 \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} \delta v_\alpha + \frac{\partial w}{\partial t} \delta w \right] \right\}_{t_1}^{t_2} + \\ & + \frac{1}{2} \rho_1 \left[\frac{\partial v^\alpha}{\partial t} \delta \gamma_\alpha + \frac{\partial \gamma^\alpha}{\partial t} \delta v_\alpha + \frac{\partial w}{\partial t} \delta \gamma + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \delta w \right]_{t_1}^{t_2} + \\ & + \rho_2 \left[\frac{\partial \gamma^\alpha}{\partial t} \delta \gamma_\alpha + \frac{\partial \gamma}{\partial t} \delta \gamma \right]_{t_1}^{t_2} \} dS - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_S \left\{ \rho_0 \left[\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} \delta v_\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta w \right] + \right. \\
& + \frac{1}{2} \rho_1 \left[\frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} \delta \gamma_\alpha + \frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2} \delta v_\alpha + \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \delta \gamma + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \delta w \right] + \\
& \left. + \rho_2 \left[\frac{\partial^2 \gamma_\alpha}{\partial t^2} \delta \gamma_\alpha + \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} \delta \gamma \right] \right\} dS dt. \quad (1.9.3)
\end{aligned}$$

Подставляя (1.8.3) и (1.8.6) в вариационное уравнение (1.9.2), с учетом того, что везде, кроме границы оболочки c_u , $\delta v_\alpha \neq 0$, $\delta w \neq 0$, $\delta \gamma^2 \neq 0$, $\delta \gamma \neq 0$, получаем следующие уравнения движения:

$$N^{\alpha\beta}_{||\beta} - b_\lambda{}^\alpha Q^\lambda + q^\alpha - \rho_0 \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \frac{\partial^2 \gamma^\alpha}{\partial t^2} = 0; \quad (1.9.4)$$

$$Q^\alpha_{||\alpha} + b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + q - \rho_0 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} = 0; \quad (1.9.5)$$

$$M^{\alpha\beta}_{||\beta} - Q^\alpha - \rho_2 \frac{\partial^2 \gamma^\alpha}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \frac{\partial^2 v_\alpha}{\partial t^2} = 0; \quad (1.9.6)$$

$$N^{33} - b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta} - \rho_2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \rho_1 \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = 0. \quad (1.9.7)$$

Кроме того, из вариационного уравнения (1.9.2) вытекают силовые граничные условия на границе контура оболочки c_T (1.8.11), (1.8.12) и (1.8.13), а также начальные условия для скоростей перемещений.

Для однородных по толщине оболочек согласно (1.7.4) обобщенные плотности определяются в виде

$$\rho_0 = \rho h; \quad \rho_1 = 0; \quad \rho_2 = \rho \frac{h^3}{12}. \quad (1.9.8)$$

С учетом этих зависимостей уравнения движения (1.9.4)–(1.9.7) упрощаются.

При конечноэлементной аппроксимации перемещений непрерывная среда заменяется системой с конечным числом степеней свободы, характеризующихся обобщенными координатами d_r ($r=1, 2, \dots, n$). Принцип Гамильтона—Остроградского используется также для получения уравнений движения системы с конечным числом степеней свободы. Условие стационарности функционала $\delta H=0$ в этом случае приводит к системе уравнений движения, или уравнений Лагранжа [169]:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{d}_r} \right) - \frac{\partial L}{\partial d_r} = F_r, \quad r=1, 2, \dots, n. \quad (1.9.9)$$

Здесь d_r и $\dot{d}_r$ — обобщенные координаты и скорости; F_r — обобщенные силы; $L = T - U$ — функция Лагранжа. На основе функционала Гамильтона—Остроградского можно построить также схемы метода конечных элементов, в которых конечно-элементной аппроксимации подлежат не только пространственные, но и временная координата.

1.10. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ ВАРИАЦИОННОГО УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА ДЛЯ ПЛОСКИХ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИИ

Применяемые на практике несущие конструкции в большинстве случаев представляют собой сочетание оболочечных, пластинчатых и стержневых элементов. Из общих соотношений для произвольных оболочек, которые получены в предыдущих параграфах, как частные случаи могут быть получены соотношения для пластин, криволинейных и прямолинейных стержней.

Распространенными конструктивными элементами являются плоские пластины и изгибаемые стержни (балки). На этих простых элементах конструкций проследим вывод основных вариационных соотношений.

1.10.1. Пластины в декартовых координатах

Рассмотрим пластину (рис. 1.7) в декартовых координатах $x = x^1$, $y = x^2$, $z = x_3$. На пластину действуют заданные распределенные нагрузки $q_x = q_{(1)}$, $q_y = q_{(2)}$, q и заданные нагрузки на границе контура c_T : изгибающий момент $M^*_{(vv)}$, крутящий момент $M^*_{(vs)}$, поперечная сила Q_* , а также заданные силы в плоскости пластины N^*_x , N^*_y . Контур c имеет внешнюю единичную нормаль ν , при этом $\nu_x = \nu_{(1)} = \cos(\nu, x)$ и $\nu_y = \nu_{(2)} = \cos(\nu, y)$ — на-

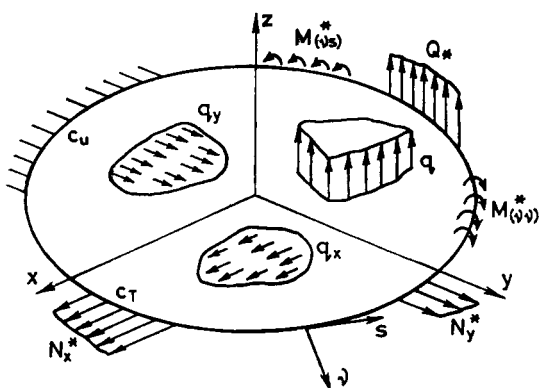


Рис. 1.7. Пластина в декартовых координатах с действующими внешними силами

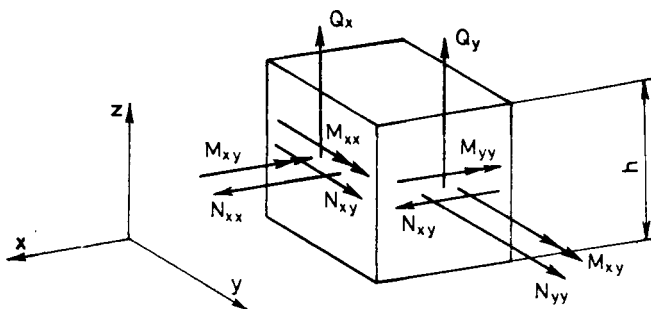


Рис. 1.8. Внутренние силы в пластине

правляющие косинусы единичной нормали контура. На части границы контура c_u заданы геометрические граничные условия на перемещения: $c = c_u + c_T$.

Основные вариационные соотношения для пластины в декартовых координатах получаются как частный случай общих соотношений для оболочек. Для пластины компоненты второго тензора поверхности равны нулю ($b_{\alpha\beta} = 0$), первый тензор поверхности равен единичному тензору ($a_{11} = a_{22} = 1$; $a_{12} = a_{21} = 0$), тензорные компоненты векторов и тензоров равны физическим компонентам. Кроме того, так как $b_{\alpha\beta} = 0$, из уравнения (1.8.10) следует, что при мембранном и изгибном деформировании одной пластины усилие $N^{33} = 0$ и, следовательно, $\gamma = 0$. Однако если деформируется составная конструкция из пластин в различных плоскостях, то $\gamma \neq 0$ и это обобщенное перемещение обеспечивает выполнение условий неразрывности в местах стыковки пластин.

При рассмотрении пластины из однородного по толщине материала мембранное и изгибное деформирование можно рассматривать отдельно. При этом задача для мембранного деформирования решается на основе соотношений для плоской задачи теории упругости, а изгибное деформирование описывается уравнениями изгиба пластин.

При рассмотрении пластин из слоистых композитных материалов неоднородные по толщине упругие свойства пластин могут быть такими, что следует учитывать мембранно-изгибное взаимодействие. Следовательно, основные вариационные соотношения слоистых пластин необходимо выводить с учетом мембранных и изгибных деформаций. Вводим обозначения для усилий, моментов (рис. 1.8), перемещений и деформаций в декартовых координатах:

$$\begin{aligned} N_{xx} &= N_{(11)}; & N_{yy} &= N_{(22)}; & N_{xy} &= N_{(12)} = N_{(21)}; \\ M_{xx} &= M_{(11)}; & M_{yy} &= M_{(22)}; & M_{xy} &= M_{(12)} = M_{(21)}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Q_x &= Q_{(1)}; \quad Q_y = Q_{(2)}; \\
u &= v_{(1)}; \quad v = v_{(2)}; \quad \gamma_x = \gamma_{(1)}; \quad \gamma_y = \gamma_{(2)}; \\
\Omega_{xx} &= \Omega_{(11)}; \quad \Omega_{yy} = \Omega_{(22)}; \quad 2\Omega_{xy} = \Omega_{(12)} + \Omega_{(21)}; \\
\chi_{xx} &= \chi_{(11)}; \quad \chi_{yy} = \chi_{(22)}; \quad 2\chi_{xy} = \chi_{(12)} + \chi_{(21)}; \\
2\Omega_{xz} &= 2\Omega_{(13)}; \quad 2\Omega_{yz} = 2\Omega_{(23)}.
\end{aligned} \tag{1.10.1}$$

С учетом этих обозначений функционал энергии деформаций (1.4.5) для пластины в декартовых координатах принимает следующий вид:

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_S \{ N_{xx} \Omega_{xx} + N_{yy} \Omega_{yy} + 2N_{xy} \Omega_{xy} + \\
&+ M_{xx} \chi_{xx} + M_{yy} \chi_{yy} + 2M_{xy} \chi_{xy} + 2Q_x \Omega_{xz} + 2Q_y \Omega_{yz} \} dS.
\end{aligned} \tag{1.10.2}$$

Подставляя кинематические соотношения (1.3.24) в функционал (1.10.2), получаем

$$\begin{aligned}
U &= \frac{1}{2} \int_S \left\{ N_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + N_{yy} \frac{\partial v}{\partial y} + N_{xy} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \right. \\
&+ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + \\
&+ Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_y \left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \left. \right\} dS.
\end{aligned} \tag{1.10.3}$$

Функционал работы заданных внешних распределенных сил на срединной поверхности (1.6.6) для пластины принимает вид

$$W_q = \int_S (q_x u + q_y v + q w) dS. \tag{1.10.4}$$

Функционал работы заданных внешних сил на контуре c_T (1.6.23) для пластины принимает вид

$$\begin{aligned}
W_c &= \int_{c_T} \{ N^*_x u + N^*_y v + Q^* w + M^*_{(vy)} (v_x \gamma_x + \\
&+ v_y \gamma_y) + M^*_{(vx)} (-v_y \gamma_x + v_x \gamma_y) \} dS.
\end{aligned} \tag{1.10.5}$$

Суммарную работу внешних сил определяет сумма функционалов (1.10.4) и (1.10.5)

$$W = W_q + W_c. \tag{1.10.6}$$

Условие стационарности потенциальной энергии определяет вариационное уравнение для получения истинных перемещений:

$$\delta \Pi = \delta U - \delta W = 0. \tag{1.10.7}$$

Здесь варьирование проводится по обобщенным перемещениям δu , δv , δw , $\delta \gamma_x$, $\delta \gamma_y$. Подставляя в (1.10.7) функционалы (1.10.3) и (1.10.6), после интегрирования по частям получаем следующее вариационное уравнение:

$$\begin{aligned} \delta \Pi = & - \int_S \left\{ \left[\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x \right] \delta u + \right. \\ & + \left[\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + q_y \right] \delta v + \left[\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right] \delta w + \\ & + \left[\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right] \delta \gamma_x + \left[\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - \right. \\ & \left. - Q_y \right] \delta \gamma_y \Big\} dS + \int_{c_T} \{ [N_{xx} v_x + N_{xy} v_y - N^*_x] \delta u + \\ & + [N_{xy} v_x + N_{yy} v_y - N^*_y] \delta v + [Q_x v_x + Q_y v_y - Q_*] \delta w + \\ & + [M_{xx} v_x + M_{xy} v_y - M^*_{(vv)} v_x + M^*_{(vs)} v_y] \delta \gamma_x + \\ & + [M_{xy} v_x + M_{yy} v_y - M^*_{(vv)} v_y - M^*_{(vs)} v_x] \delta \gamma_y \} ds = 0. \quad (1.10.8) \end{aligned}$$

Ввиду произвольности вариаций δu , δv , δw , $\delta \gamma_x$ и $\delta \gamma_y$ из вариационного уравнения (1.10.8) вытекают уравнения равновесия пластины

$$\frac{\partial N_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + q_x = 0; \quad (1.10.9)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_{yy}}{\partial y} + q_y = 0; \quad (1.10.10)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q = 0; \quad (1.10.11)$$

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0; \quad (1.10.12)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (1.10.13)$$

и силовые граничные условия на контуре пластины

$$N_{xx} v_x + N_{xy} v_y = N^*_x; \quad (1.10.14)$$

$$N_{xy} v_x + N_{yy} v_y = N^*_y; \quad (1.10.15)$$

$$Q_x v_x + Q_y v_y = Q_*; \quad (1.10.16)$$

$$M_{xx} v_x + M_{xy} v_y = M^*_{(vv)} v_x - M^*_{(vs)} v_y; \quad (1.10.17)$$

$$M_{xy} v_x + M_{yy} v_y = M^*_{(vv)} v_y + M^*_{(vs)} v_x. \quad (1.10.18)$$

Граничные условия (1.10.17) и (1.10.18) можно записать также в другом виде. Для этого условие (1.10.17) умножается на v_x ,

а условие (1.10.18) — на v_y . С учетом того, что $v_x^2 + v_y^2 = 1$, сумма обоих условий приводит к соотношению

$$M_{xx}v_x^2 + 2M_{xy}v_xv_y + M_{yy}v_y^2 = M^*_{(vv)}. \quad (1.10.19)$$

Умножая (1.10.17) на v_y , а (1.10.18) на v_x и вычитая из второго условия первое, получаем

$$(M_{yy} - M_{xx})v_xv_y + M_{xy}(v_x^2 - v_y^2) = M^*_{(vs)}. \quad (1.10.20)$$

Граничные условия моментов для пластины (1.10.19) и (1.10.20) можно непосредственно получить также из граничных условий для оболочек (1.8.14).

1.10.2. Балки при плоском изгибе

Рассмотрим балку длиной l (рис. 1.9) в декартовых координатах x, y, z . Ось балки совпадает с осью x . Балка изгибается в плоскости xz . На балку действует поперечная распределенная нагрузка на единицу длины q , момент M_* и сосредоточенная сила P_* . Внутренние силы в балке — изгибающий момент M_{xx} и поперечная сила Q_x (рис. 1.10):

$$M_{xx} = \iint_F \sigma_{xx} z dz dy; \quad Q_x = \iint_F \sigma_{xz} dz dy, \quad (1.10.21)$$

где F — площадь поперечного сечения стержня. Функционал энергии деформации для балки при плоском изгибе имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \{ M_{xx} \chi_{xx} + 2Q_x \Omega_{x3} \} dx. \quad (1.10.22)$$

Подставляя кинематические соотношения (1.3.26) в функционал (1.10.22), получаем

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \left\{ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx. \quad (1.10.23)$$

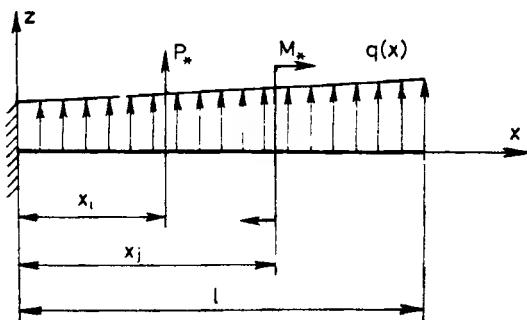


Рис. 1.9. Внешние силы в балке при плоском изгибе

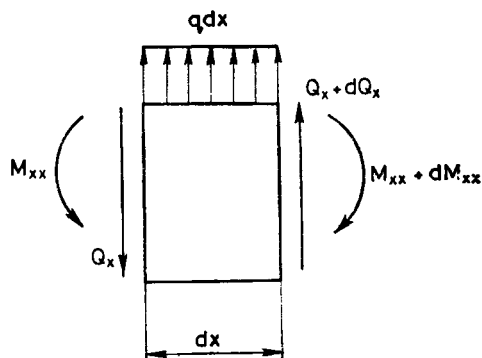


Рис. 1.10. Внутренние силы в балке при плоском изгибе

Функционал работы распределенной нагрузки (1.6.6) для балки принимает вид

$$W_q = \int_0^l q w dx. \quad (1.10.24)$$

Работа сосредоточенных сил и моментов, приложенных к балке в точках $x = x_i$ и $x = x_j$,

$$W_P + W_M = P_* w(x_i) + M_* \gamma_x(x_j). \quad (1.10.25)$$

Балка при плоском изгибе имеет две степени свободы при перемещении ее как жесткого тела. Следовательно, для геометрической неизменяемости конструкции на балку должны быть наложены как минимум две связи. Например (см. рис. 1.9), имеются два геометрических граничных условия:

$$\begin{aligned} w &= 0 \text{ при } x=0; \\ \gamma_x &= 0 \text{ при } x=0. \end{aligned} \quad (1.10.26)$$

Вариация по перемещениям суммы функционалов (1.10.23) — (1.10.25) определяет условия стационарности потенциальной энергии:

$$\begin{aligned} \delta \Pi &= \delta U - \delta W_q - \delta W_P - \delta W_M = \\ &= \int_0^l \left\{ M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) + Q_x \left[\delta \gamma_x + \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] \right\} dx - \\ &\quad - \int_0^l q \delta w dx - P_* \delta w(x_i) - M_* \delta \gamma_x(x_j) = 0. \end{aligned} \quad (1.10.27)$$

Преобразуем в этом уравнении путем интегрирования по частям первое слагаемое:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dx = \int_0^{x_i-0} M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dx + \\
 & + \int_{x_i+0}^{x_j-0} M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dx + \int_{x_j+0}^l M_{xx} \delta \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) dx = \\
 & = M_{xx} \delta \gamma_x \Big|_0^l + [M_{xx}(x_i-0) - M_{xx}(x_i+0)] \delta \gamma_x + \\
 & + [M_{xx}(x_j-0) - M_{xx}(x_j+0)] \delta \gamma_x - \int_0^{x_i-0} \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \gamma_x dx - \\
 & - \int_{x_i+0}^{x_j-0} \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \gamma_x dx - \int_{x_j+0}^l \frac{\partial M_x}{\partial x} \delta \gamma_x dx. \quad (1.10.28)
 \end{aligned}$$

Таким же образом в уравнении (1.10.27) преобразуем третье слагаемое:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^l Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \int_0^{x_i-0} Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \\
 & + \int_{x_i+0}^{x_j-0} Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx + \int_{x_j+0}^l Q_x \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) dx = \\
 & = Q_x \delta w \Big|_0^l + [Q_x(x_i-0) - Q_x(x_i+0)] \delta w + \\
 & + [Q_x(x_j-0) - Q_x(x_j+0)] \delta w - \int_0^{x_i-0} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx - \\
 & - \int_{x_i+0}^{x_j-0} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx - \int_{x_j+0}^l \frac{\partial Q_x}{\partial x} \delta w dx. \quad (1.10.29)
 \end{aligned}$$

З силу произвольности вариаций δw и $\delta \gamma_x$ везде в балке, кроме очки $x=0$, где заданы геометрические граничные условия (1.10.20), $\delta w \neq 0$ и $\delta \gamma_x \neq 0$. Из вариационного уравнения

(1.10.27) с учетом (1.10.28) и (1.10.29) следуют уравнения равновесия

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} - Q_x = 0; \quad (1.10.30)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} - q = 0. \quad (1.10.31)$$

Из вариационного уравнения (1.10.27) с учетом (1.10.28) и (1.10.29) следуют также главные и естественные граничные условия и условия стыковки в точках $x=x_i$ и $x=x_j$. В силу геометрических граничных условий (1.10.26) вариация перемещений в точке $x=0$ равна нулю:

$$\delta w = 0; \quad \delta \gamma_x = 0 \quad \text{при } x=0. \quad (1.10.32)$$

Заданные значения функций w и γ_x определяют главные граничные условия вариационной задачи. Из вариационного уравнения (1.10.27) с учетом (1.10.28) и (1.10.29) следуют также естественные граничные условия при $x=l$, так как здесь $\delta w \neq 0$ и $\delta \gamma_x \neq 0$:

$$\begin{aligned} Q_x &= 0 \quad \text{при } x=l; \\ M_{xx} &= 0 \quad \text{при } x=l. \end{aligned} \quad (1.10.33)$$

Таким же образом из вариационного уравнения (1.10.27) с учетом (1.10.28) и (1.10.29) следуют условия стыковки в точках $x=x_i$ и $x=x_j$:

$$\begin{aligned} w \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} &= 0; \quad \gamma_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} = 0; \\ M_{xx} \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} &= 0; \quad Q_x \Big|_{x_i-0}^{x_i+0} - P_* = 0; \\ w \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} &= 0; \quad \gamma_x \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0; \\ M_{xx} \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} - M_* &= 0; \quad Q_x \Big|_{x_j-0}^{x_j+0} = 0. \end{aligned} \quad (1.10.34)$$

Условия (1.10.34) определяют, что в точке $x=x_i$ функция поперечной силы Q_x имеет разрыв на величину сосредоточенной силы P_* , а в точке $x=x_j$ функция изгибающего момента M_{xx} имеет разрыв на величину приложенного в этой точке момента M_* . Так как функции Q_x и M_{xx} разрывны, в точках разрыва для них не существует производная, поэтому уравнение

равновесия (1.10.30) выполняется везде, кроме точки $x = x_j$, т. е. точки разрыва функции M_{xx} . Уравнение равновесия (1.10.31) выполняется везде, кроме точки $x = x_i$, т. е. точки разрыва функции поперечной силы Q_x .

1.11. НАПРЯЖЕНИЯ В ОБОЛОЧКАХ И ПЛАСТИНАХ

При расчете несущей способности конструкции главная задача заключается в оценке ее прочности. Для оценки прочности необходимо определить напряжения. Напряжения в оболочках и пластинах определяются согласно принятым гипотезам. В теориях оболочек напряжения обычно не определяются путем прямого решения, а определяются через другие искомые функции. Так, если задача решается в перемещениях, например, с помощью принципа минимума потенциальной энергии, то после определения перемещений вычисляются деформации, а затем через деформации определяются интегральные усилия и моменты, из которых рассчитываются напряжения. Если задача решается на основе функционалов Кастильяно или Рейснера, то путем решения определяются интегральные усилия и моменты, а из них вычисляются напряжения.

Вообще говоря, внутренние силы, по которым проводится оценка прочности конструкции, могут быть различными. Ими могут служить усредненные по толщине оболочки интегральные усилия и моменты. В слоистых композитах в качестве внутренних сил для оценки прочности могут быть выбраны напряжения, усредненные по характерному объему слоя. В композитах для оценки прочности могут быть выбраны также микронапряжения, которые усреднены по характерному объему, сравнимому с размерами волокон. Разрушение волокнистых композитов, упрочненных дисперсными частицами, и поликристаллических тел происходит по различным механизмам. Механизмы разрушения конструкции различаются для хрупких и пластичных материалов. На механизмы разрушения и прочность конструкции влияют также концентраторы напряжений, различные дефекты и многие другие факторы. Поэтому для оценки прочности оболочки не могут быть даны готовые формулы, а определение несущей способности конструкции основано на анализе различных факторов. Поле напряжений является только одним из этих факторов. От точности определения напряжений зависит точность оценки прочности конструкции. Различные варианты теорий оболочек дают различную точность определения напряжений.

Далее для рассматриваемого варианта теории оболочек типа Тимошенко изложены алгоритмы определения напряжений в

однородных по толщине и слоистых оболочках. Теория типа Тимошенко базируется на линейной аппроксимации поля перемещений по толщине оболочки, следовательно, мембранные напряжения также линейно распределяются по толщине оболочки. Поэтому рассматриваемая теория оболочек типа Тимошенко является теорией первого порядка. Классическая теория оболочек, основанная на гипотезе Кирхгофа—Лява, также является теорией первого порядка. Локальные характеристики напряжений в обеих этих теориях определяются с одинаковой степенью точности. Теория типа Тимошенко по сравнению с классической теорией уточняет лишь интегральные характеристики: критические нагрузки, частоты собственных колебаний, прогибы.

1.11.1. Однородные по толщине оболочки

Рассмотрим алгоритм определения напряжений для однородных по толщине оболочек. При использовании принципа минимума потенциальной энергии минимизацией функционала потенциальной энергии определяется поле перемещений. Далее по соотношениям (1.3.27) вычисляются деформации ϵ . Затем по физическим соотношениям (1.5.8) определяются интегральные внутренние силы — усилия, моменты и поперечные силы σ . Для однородной оболочки в соотношении (1.5.8) матрица $\mathbf{D}$ определяется через матрицу жесткости материала оболочки A_{ij} :

$$Q_{ij} = hA_{ij}; \quad B_{ij} = 0; \quad D_{ij} = \frac{h^3}{12} A_{ij}. \quad (1.11.1)$$

Распределение мембранных напряжений линейно по толщине оболочки, и они вычисляются из усилий и моментов по формуле

$$\sigma_{(\alpha\beta)} = \frac{1}{h} N_{(\alpha\beta)}(x^\alpha) + \frac{12}{h^3} x_3 M_{(\alpha\beta)}(x^\alpha). \quad (1.11.2)$$

Распределение напряжений поперечных сдвигов $\sigma_{(\alpha 3)}$ зависит от принятого закона их распределения по толщине:

$$\sigma_{(\alpha 3)} = \frac{1}{h} Q_{(\alpha)} f_1(x_3). \quad (1.11.3)$$

Здесь $f_1(x_3)$ — функция, которая характеризует распределение напряжений поперечного сдвига по толщине оболочки. Если распределение напряжений симметрично относительно срединной поверхности оболочки, то функция $f_1(x_3)$ является четной:

$$f_1(x_3) = f_1(-x_3). \quad (1.11.4)$$

Для четной функции должно выполняться условие

$$\int_{-h/2}^{h/2} f_1(x_3) x_3 dx_3 = 0. \quad (1.11.5)$$

Интегрированием (1.11.3) по толщине оболочки должны быть получены соотношения (1.4.4). При условии, что $\mu=1$ (пологая оболочка), функция $f_1(x_3)$ должна удовлетворять условию

$$\frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f_1(x_3) dx_3 = 1. \quad (1.11.6)$$

Вводим обозначение для коэффициента сдвига k :

$$\frac{1}{k} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f_1^2(x_3) dx_3. \quad (1.11.7)$$

Закон Гука, связывающий напряжения поперечного сдвига с деформациями поперечного сдвига, имеет вид

$$\begin{aligned} \sigma_{(13)} &= 2A_{55}\Omega_{(13)}^*; \\ \sigma_{(23)} &= 2A_{44}\Omega_{(23)}^*. \end{aligned} \quad (1.11.8)$$

Из этих соотношений и выражения (1.11.3) получаем

$$\begin{aligned} 2\Omega_{(13)}^* &= \frac{Q_{(1)}}{h} \frac{1}{A_{55}} f_1(x_3); \\ 2\Omega_{(23)}^* &= \frac{Q_{(2)}}{h} \frac{1}{A_{44}} f_1(x_3). \end{aligned} \quad (1.11.9)$$

Однако согласно гипотезе Тимошенко углы поперечного сдвига, которые определяются формулами (1.3.12), постоянны по толщине оболочки:

$$\begin{aligned} 2\Omega_{(13)} &= \gamma_{(1)} + \Psi_{(1)}; \\ 2\Omega_{(23)} &= \gamma_{(2)} + \Psi_{(2)}, \end{aligned} \quad (1.11.10)$$

где $\Psi_{(1)}$ и $\Psi_{(2)}$ определяются формулами (1.3.10).

Приравнявая работу поперечных сил на средние деформации (1.11.10) к работе напряжений поперечного сдвига на локальные деформации (1.11.9), получаем условия

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Q_{(1)} 2\Omega_{(13)} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(13)} 2\Omega_{(13)}^* dx_3; \\ \frac{1}{2} Q_{(2)} 2\Omega_{(23)} &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(23)} 2\Omega_{(23)}^* dx_3. \end{aligned} \quad (1.11.11)$$

Подставляя (1.11.9) и (1.11.10) в эти соотношения, с учетом (1.11.7) получаем

$$\begin{aligned} Q_{(1)} &= kA_{55}h(\gamma_{(1)} + \Psi_{(1)}); \\ Q_{(2)} &= kA_{44}h(\gamma_{(2)} + \Psi_{(2)}). \end{aligned} \quad (1.11.12)$$

Коэффициент сдвига k зависит от вида функции $f_1(x_3)$. Если на внешней и внутренней поверхности оболочки отсутствуют касательные нагрузки, то из уравнений равновесия трехмерной теории упругости (1.2.8) $\sigma_{ij,j} = 0$ следует, что при линейном распределении мембранных напряжений (1.11.2) по толщине оболочки напряжения поперечного сдвига меняются по закону квадратной параболы. Тогда функция $f_1(x_3)$ приобретает вид

$$f_1(x_3) = 6 \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{x_3}{h} \right)^2 \right]. \quad (1.11.13)$$

Эта функция удовлетворяет условиям (1.11.4), (1.11.5) и (1.11.6). Коэффициент сдвига, вычисленный по выражению (1.11.7), $k = 5/6$. Такой же коэффициент получается, если от трехмерной упругой дополнительной энергии (1.2.14) с помощью рассматриваемых здесь гипотез (линейное распределение мембранных напряжений, параболическое распределение напряжений поперечного сдвига) перейти на двумерный функционал дополнительной энергии. Коэффициент $k = 5/6$ в уточненной теории пластин принят также в работах [6, 145]. С. П. Тимошенко [166] предложил использовать коэффициент сдвига $k = 2/3$ и $k = 8/9$. В работе [118] коэффициент сдвига предложено определять из сравнения скорости распространения упругих волн на основе уточненной теории и соответствующей скорости, найденной с помощью трехмерных уравнений теории упругости. Если сравнить частоту первой антисимметричной формы колебаний прямоугольной удлиненной пластины по рассматриваемой здесь теории типа Тимошенко и частоту точной трехмерной теории упругости, то коэффициент сдвига $k = \pi^2/12$. При решении задачи поперечных колебаний балок прямоугольного сечения по трехмерной теории в работе [126] показано, что при коэффициенте сдвига $k = 2/3$ уточненная теория и трехмерная теория дают близкие результаты.

Подобным же образом вычисляется поперечное нормальное напряжение σ_{33} . Так же как для напряжений поперечного сдвига, можно принять функцию распределения $f_2(x_3)$ для напряжения обжатия нормали:

$$\sigma_{33} = \frac{N_{33}}{h} f_2(x_3). \quad (1.11.14)$$

Если для напряжений поперечных сдвигов имеем квадратичное распределение по толщине оболочки, то из уравнений равновесия трехмерной теории упругости следует, что напряжение σ_{33} будет иметь кубическое распределение по координате x_3 .

Закон Гука для поперечных нормальных напряжений имеет вид (без учета эффекта Пуассона)

$$\sigma_{(33)} = A_{33} \Omega^*_{(33)}. \quad (1.11.15)$$

Здесь $\Omega^*_{(33)}$ — локальные поперечные нормальные деформации. Из соотношений (1.11.14) и (1.11.15) получаем

$$\Omega^*_{(33)} = \frac{N_{33}}{h} \frac{1}{A_{33}} f_2(x_3). \quad (1.11.16)$$

Однако согласно кинематической гипотезе поперечные нормальные деформации (1.3.12) постоянны по толщине оболочки:

$$\Omega_{(33)} = \gamma. \quad (1.11.17)$$

Приравнивая работу усилия N_{33} на средние нормальные деформации (1.11.17) к работе напряжений σ_{33} на локальные поперечные нормальные деформации (1.11.16), получаем

$$\frac{1}{2} N_{33} \gamma = \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{33} \Omega^*_{(33)} dx_3. \quad (1.11.18)$$

Подставляя (1.11.15) — (1.11.17) в это равенство, имеем

$$N_{33} = k_* A_{33} h \gamma. \quad (1.11.19)$$

Здесь k_* — коэффициент поперечного обжатия:

$$\frac{1}{k_*} = \frac{1}{h} \int_{-h/2}^{h/2} f_2^2(x_3) dx_3. \quad (1.11.20)$$

1.11.2. Слоистые оболочки

Рассмотрим алгоритм определения напряжений в неоднородной по толщине оболочке, составленной из K слоев различной жесткости и различной толщины (см. рис. 1.3). Возможны различные подходы к определению напряжений в многослойных конструкциях.

В работе [32] для слоистых пластинок и в работе [6] для слоистых оболочек был предложен следующий подход для определения поперечных, касательных и нормальных напряжений. Сначала из уравнений равновесия в перемещениях определя-

ются функции перемещений срединной поверхности оболочки или пластины. Далее из перемещений рассчитываются деформации, а из них по физическим соотношениям вычисляются мембранные напряжения в слоях. Затем при помощи уравнений равновесия в напряжениях трехмерной теории упругости, условий непрерывности поперечных напряжений на поверхностях раздела слоев и статических граничных условий на верхней и нижней поверхностях оболочки определяются поперечные, касательные и нормальные напряжения в пластине или полой оболочке. Этот подход определения напряжений для статических задач изложен в работах [6, 7]. Такой алгоритм определения напряжений в динамических задачах использован в работе [12].

Если перемещения в оболочке определяются на основе принципа минимума потенциальной энергии, то алгоритм определения напряжений подобен вышеизложенному и сводится к следующему. Сначала на основе соотношений (1.3.27) из перемещений u определяются деформации в оболочке:

$$\epsilon = Lu. \quad (1.11.21)$$

Из этих деформаций выделяются мембранные и изгибные деформации:

$$\begin{aligned} \Omega^T &= \{\Omega_{(11)}, \Omega_{(22)}, 2\Omega_{(12)}\}; \\ k^T &= \{\chi_{(11)}, \chi_{(22)}, 2\chi_{(12)}\}. \end{aligned} \quad (1.11.22)$$

Далее по соотношениям (1.5.3) вычисляются мембранные деформации в любой точке по толщине оболочки:

$$e = \Omega + x_3 k. \quad (1.11.23)$$

Здесь $e^T = \{e_{(11)}, e_{(22)}, 2e_{(12)}\}$ — полные деформации оболочки. Далее используется закон Гука для слоя и вычисляются мембранные напряжения в k -м слое:

$$\sigma_{*(k)} = A_{(k)} e. \quad (1.11.24)$$

Здесь $\sigma_{*(k)}^T = \{\sigma_{(11)}^{(k)}, \sigma_{(22)}^{(k)}, \sigma_{(12)}^{(k)}\}$ — напряжения в k -м слое оболочки; $A_{(k)}$ — матрица констант жесткости k -го слоя оболочки:

$$A_{(k)} = \begin{bmatrix} A_{11}^{(k)} & A_{12}^{(k)} & A_{16}^{(k)} \\ A_{21}^{(k)} & A_{22}^{(k)} & A_{26}^{(k)} \\ A_{61}^{(k)} & A_{62}^{(k)} & A_{66}^{(k)} \end{bmatrix} \quad (1.11.25)$$

Таким образом, согласно формулам (1.11.23) и (1.11.24) мембранные напряжения являются кусочно-линейными функциями от поперечной координаты x_3 .

Поперечные касательные напряжения в каждом слое вычисляются путем интегрирования уравнений равновесия трехмерной теории упругости:

$$\sigma_{ij,j} = 0. \quad (1.11.26)$$

Кроме того, используются условия неразрывности поперечных касательных напряжений на границах раздела k -го и $k+1$ -го слоев:

$$\sigma_{(\alpha\beta)}(x_3^{k+1}) = \sigma_{(\alpha\beta)}^{k+1}(x_3^{k+1}). \quad (1.11.27)$$

Используются также граничные условия на верхней и нижней поверхностях оболочки. В рассматриваемом варианте теории оболочек касательные распределенные нагрузки считаются приложенными к срединной поверхности оболочки и на верхней и нижней поверхностях касательные нагрузки отсутствуют, т. е.

$$\sigma_{(\alpha\beta)}^1\left(-\frac{h}{2}\right) = \sigma_{(\alpha\beta)}^K\left(\frac{h}{2}\right) = 0. \quad (1.11.28)$$

Можно также в условии (1.11.28) учитывать реально приложенные касательные (или нормальные) нагрузки к верхней или нижней поверхности оболочки, а при определении поля перемещений касательные (или нормальные) нагрузки считать приложенными к срединной поверхности оболочки. Алгоритм определения поперечных нормальных напряжений σ_{33} аналогичен вышеизложенному.

Для иллюстрации (см. рис. 7.5, 7.6) показаны распределения мембранных и поперечных касательных напряжений в трехслойной углепластиковой бесконечно длинной свободно опертой пластине при цилиндрическом изгибе под действием синусоидальной распределенной нагрузки. Штриховыми линиями показаны результаты решения по вышеизложенному алгоритму, сплошные линии отражают решение по уравнениям теории упругости [136]. Для сравнения точности приближенных решений показаны решения при относительной толщине пластины $L/h=4$ (см. рис. 7.6) и $L/h=10$ (см. рис. 7.5). Вычисленные по вышеприведенному алгоритму напряжения в случае, если перемещения определяются из уравнений классической теории пластин, практически совпадают с напряжениями, вычисленными по теории типа Тимошенко. Однако сами перемещения, вычисленные по обеим теориям, различаются значительно. При вычислениях напряжений теории оболочек и пластин первого порядка дают качественно и количественно удовлетворительные результаты по сравнению с точными решениями, если отношение длины балки к ее толщине $L/h \geq 10$. При этом в данном

примере рассматривался весьма податливый на поперечный сдвиг материал (углепластик). Вышеупомянутые оценки относятся только к оболочкам и пластинам, нагруженным распределенной нагрузкой. Распределение напряжений вблизи сосредоточенных нагрузок не может быть правильно рассчитано на основе уравнений теории оболочек и пластин.

Если задача деформирования оболочек решается на основе принципа дополнительной энергии, на основе смешанных вариационных принципов или на основе гибридных схем метода конечных элементов, то алгоритм определения напряжений будет другой. Некоторые примеры определения напряжений по этим схемам будут даны в главе 7.

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

2.1. ВВЕДЕНИЕ

Большинство схем метода конечных элементов строится на основе принципа минимума (стационарности) потенциальной энергии, что обусловлено простотой и универсальностью этого принципа. При определении перемещений, интегральной жесткости конструкции, критических сил, частот собственных колебаний несомненны преимущества принципа минимума потенциальной энергии перед другими вариационными принципами. Однако непосредственной минимизацией потенциальной энергии определяются только перемещения. Внутренние силы (напряжения) вычисляются через производные от функций перемещений, что значительно увеличивает погрешность определения напряжений. Особенно большие погрешности определения напряжений возникают в местах концентрации напряжений и в неоднородных средах, где существенно меняются жесткостные свойства материала, например в слоистых средах на границах стыковки слоев.

В этих случаях для повышения точности определения напряжений следует применять вариационные принципы, в которых варьируемыми являются внутренние силы, или смешанные вариационные принципы, в которых варьируются как внутренние силы, так и перемещения. При построении схем метода конечных элементов особенно эффективен смешанный вариационный принцип Рейснера [58, 143]. На основе смешанных вариационных принципов можно построить различные гибридные схемы метода конечных элементов [20]. Гибридные схемы основаны на аппроксимации нескольких полей. При этом одно поле, например поле напряжений, аппроксимируется только внутри конечных элементов, а другое поле, например поле перемещений, аппроксимируется внутри и на границах конечных элементов. При построении матриц для конечного элемента внутреннее поле, например поле напряжения, исключается и для всей области варьируются только перемещения. Построенные таким образом схемы метода конечных элементов оказываются весьма эффективными для решения задач деформирования неоднород-

ных конструкций, конструкций с включениями, концентраторами и т. п. Кроме того, в вариационных постановках важное значение имеет двойственный анализ. Так, одновременное применение двойственных принципов (Лагранжа и Кастильяно) позволяет на основе приближенных решений получать верхние и нижние оценки для точного решения. В свою очередь, смешанные вариационные принципы дают промежуточные значения искомых величин [169].

В данной главе рассмотрены функционалы обобщенного вариационного принципа, а также вариационных принципов Рейснера и Кастильяно для решения линейных задач. Рассмотрен общий случай деформирования произвольных оболочек и случай изгиба пластин в декартовых координатах. В конце главы рассмотрена модифицированная форма смешанного функционала Рейснера, на основе которой в главе 7 строятся гибридные схемы метода конечных элементов. Вывод всех функционалов основан на соотношениях линейной теории оболочек типа Тимошенко, рассмотренной в главе 1, и на функционалах трехмерной теории упругости, которые приведены в параграфе 1.2.

2.2. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ ОБОБЩЕННОГО ВАРИАЦИОННОГО ПРИНЦИПА

По аналогии с функционалом обобщенного вариационного принципа (1.2.1) в трехмерной теории упругости можно построить функционалы для двумерных элементов конструкций — оболочек и пластин.

2.2.1. Общий случай произвольных оболочек

В обобщенном вариационном принципе в качестве функциональных аргументов выступают деформации, внутренние силы и перемещения. В теории оболочек типа Тимошенко, рассматриваемой в главе 1, в качестве деформаций (для варианта пологих оболочек) выступают мембранные деформации $\Omega_{\alpha\beta}$, деформации изгиба $\chi_{\alpha\beta}$, деформации поперечных сдвигов $\Omega_{\alpha 3}$ и поперечного обжатия Ω_{33} . В качестве внутренних сил выступают мембранные усилия $N^{\alpha\beta}$, моменты $M^{\alpha\beta}$, поперечные силы Q^α и нормальная сила N_{33} . В качестве перемещений выступают перемещения срединной поверхности u_α , w и обобщенные перемещения γ_α , γ . Предполагается, что удельная энергия деформации U_0 , входящая в функционал обобщенного вариационного принципа, выражена через деформации. Для оболочки в линейной

теории это выражение получено в параграфе 1.5 и определяется подынтегральным выражением в формуле (1.5.9). В тензорной записи выражение для удельной энергии деформации имеет вид

$$U_0(\Omega_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}, \Omega_{\alpha 3}, \Omega_{33}) = \frac{1}{2} (Q^{ijkl} \Omega_{ij} \Omega_{kl} + \\ + B^{\alpha\beta\lambda\delta} \Omega_{\alpha\beta} \chi_{\lambda\delta} + D^{\alpha\beta\gamma\delta} \chi_{\alpha\beta} \chi_{\gamma\delta}). \quad (2.2.1)$$

По аналогии с функционалом (1.2.1) построим функционал для обобщенного вариационного принципа в теории оболочек:

$$\Pi_W = \int_S \left\{ U_0(\Omega_{\alpha\beta}, \chi_{\alpha\beta}, \Omega_{\alpha 3}, \Omega_{33}) - N^{\alpha\beta} \left\{ \Omega_{\alpha\beta} - \right. \right. \\ - \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha\parallel\beta} + v_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} w \right] \left. \right\} - M^{\alpha\beta} \left\{ \chi_{\alpha\beta} - \left[\frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\parallel\beta} + \right. \right. \\ + \gamma_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} \gamma \left. \right] \left. \right\} - Q^\alpha [2\Omega_{\alpha 3} - (\gamma_\alpha + w_{,\alpha} + b_{\lambda\alpha} v^\lambda)] - \\ - N^{33} [\Omega_{33} - \gamma] - q^\alpha v_\alpha - q w \left. \right\} dS - \\ - \int_{c_T} (N_*^\alpha v_\alpha + Q_* w + M_{(vv)}^* v^\alpha \gamma_\alpha + M_{(vs)}^* \varepsilon_*^{\tau\alpha} v_\tau \gamma_\alpha) ds - \\ - \int_{c_u} \{ (v_\alpha - v_\alpha^*) \lambda^\alpha + (w - w_*) \lambda + (\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) v^\alpha m_{(v)} + \\ + (\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) \varepsilon_*^{\lambda\alpha} v_\lambda m_{(s)} \} ds. \quad (2.2.2)$$

Здесь c_T — граница контура оболочки с нормалью $v = v^\alpha a_\alpha$, где заданы внешние силы N_*^α , Q_* , $M_{(vv)}^*$, $M_{(vs)}^*$; c_u — граница контура оболочки, где заданы перемещения v_α^* , w_* , γ_α^* . В последнем интеграле функционала (2.2.2) функции λ^α , λ , $m_{(v)}$ и $m_{(s)}$ являются множителями Лагранжа, которые введены для учета геометрических граничных условий на границе контура c_u .

Варьируя функционал (2.2.2) по независимым функциональным аргументам $\delta\Omega_{\alpha\beta}$, $\delta\chi_{\alpha\beta}$, $\delta\Omega_{\alpha 3}$, $\delta\Omega_{33}$, $\delta N^{\alpha\beta}$, $\delta M^{\alpha\beta}$, δQ^α , δN^{33} , δv^α , δw , $\delta\gamma_\alpha$, $\delta\gamma$ и по множителям Лагранжа $\delta\lambda^\alpha$, $\delta\lambda$, $\delta m_{(v)}$, $\delta m_{(s)}$, получаем вариационное уравнение. Условие стационарности функционала $\delta\Pi_W = 0$ приводит к уравнениям равновесия оболочки (1.8.7) — (1.8.10), геометрическим граничным условиям на части контура оболочки c_u

$$v^\alpha = v_\alpha^*; \quad w = w_*; \quad (\gamma^\alpha - \gamma_\alpha^*) v_\alpha = 0; \\ (\gamma^\alpha - \gamma_\alpha^*) \varepsilon_*^{\lambda\alpha} v_\lambda = 0, \quad (2.2.3)$$

силовым граничным условиям на части контура оболочки c_τ

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta}v_\beta &= N_*^\alpha; \\ Q^{\alpha}v_\alpha &= Q_*; \\ M^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta &= M^*_{(vv)}; \\ M^{\alpha\beta}e^*_{\tau\beta}v^\tau v_\alpha &= M^*_{(vs)} \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

и условиям на контуре c_u , определяющим физический смысл множителей Лагранжа,

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= N^\alpha = N^{\alpha\beta}v_\beta; \quad \lambda = Q = Q^{\alpha}v_\alpha; \\ m_{(v)} &= M_{(vv)} = M^{\alpha\beta}v_\alpha v_\beta; \\ m_{(s)} &= M_{(vs)} = e^*_{\lambda\beta} M^{\alpha\beta}v_\alpha v^\lambda. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

Таким образом, множители Лагранжа имеют смысл внутренних сил на контуре c_u .

Кроме того, условие стационарности функционала приводит к кинематическим соотношениям

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(v_{\alpha\parallel\beta} + v_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta}\omega; \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\gamma_{\alpha\parallel\beta} + \gamma_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta}\gamma; \\ 2\Omega_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha} + \omega_{,\alpha} + b_{\alpha\lambda}v^\lambda; \\ \Omega_{33} &= \gamma, \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

а также к физическим соотношениям

$$\begin{aligned} N^{\alpha\beta} &= \frac{\partial U_0}{\partial \Omega_{\alpha\beta}} = Q^{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega_{\gamma\delta} + B^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}; \\ M^{\alpha\beta} &= \frac{\partial U_0}{\partial \chi_{\alpha\beta}} = B^{\alpha\beta\gamma\delta}\Omega_{\gamma\delta} + D^{\alpha\beta\gamma\delta}\chi_{\gamma\delta}; \\ Q^\alpha &= \frac{\partial U_0}{\partial \Omega_{\alpha 3}} = 2Q^{\alpha\beta\gamma 3}\Omega_{\beta\gamma}; \\ N^{33} &= \frac{\partial U_0}{\partial \Omega_{33}} = Q^{3333}\Omega_{33} + Q^{33\alpha\beta}\Omega_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

Таким образом, все соотношения теории оболочек вытекают из обобщенного функционала (2.2.2). Кроме того, естественными граничными условиями этого функционала являются как геометрические, так и силовые граничные условия.

2.2.2. Пластины в декартовых координатах при поперечном изгибе

При поперечном изгибе пластины в качестве функциональных аргументов обобщенного вариационного принципа выступают деформации изгиба χ_{xx} , χ_{yy} , $2\chi_{xy}$, деформации поперечного сдвига Ω_{xz} , Ω_{yz} , моменты M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , поперечные силы Q_x , Q_y и перемещения w , γ_x , γ_y .

Удельная энергия деформаций для однородной по толщине пластины определяется в виде

$$U_0(\chi_{xx}, \chi_{yy}, 2\chi_{xy}, \Omega_{xz}, \Omega_{yz}) = \frac{1}{2} \{ D_{11}\chi_{xx}^2 + 2D_{12}\chi_{xx}\chi_{yy} + D_{22}\chi_{yy}^2 + \\ + 4D_{66}\chi_{xy}^2 + kA_{55}h(2\Omega_{xz})^2 + kA_{44}h(2\Omega_{yz})^2 \}. \quad (2.2.8)$$

Функционал обобщенного вариационного принципа для изгибаемой пластины имеет вид

$$\Pi_W = \int_S \left\{ U_0(\chi_{xx}, \chi_{yy}, 2\chi_{xy}, \Omega_{xz}, \Omega_{yz}) - \right. \\ - M_{xx} \left(\chi_{xx} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \right) - M_{yy} \left(\chi_{yy} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - \\ - M_{xy} \left(2\chi_{xy} - \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \right) - Q_x \left[2\Omega_{xz} - \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right] - \\ - Q_y \left[2\Omega_{yz} - \left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] - qw \} dS - \\ - \int_{c_T} \{ Q_* w + M^*_{(vv)} (v_x \gamma_x + v_y \gamma_y) + M^*_{(vs)} (\gamma_y v_x - \gamma_x v_y) \} ds - \\ - \int_{c_u} \{ (\omega - \omega_*) \lambda + [(\gamma_x - \gamma^*_x) v_x - (\gamma_y - \gamma^*_y) v_y] m_{(v)} + \\ + [(\gamma_y - \gamma^*_y) v_x - (\gamma_x - \gamma^*_x) v_y] m_{(s)} \} ds. \quad (2.2.9)$$

Здесь λ , $m_{(v)}$, $m_{(s)}$ — множители Лагранжа, которые введены для учета геометрических граничных условий. Варьируя функционал по независимым функциональным аргументам $\delta\chi_{xx}$, $\delta\chi_{yy}$, $\delta\chi_{xy}$, $\delta\Omega_{xz}$, $\delta\Omega_{yz}$, δM_{xx} , δM_{yy} , δM_{xy} , δQ_x , δQ_y , δw , $\delta\gamma_x$, $\delta\gamma_y$ и множителям Лагранжа $\delta\lambda$, $\delta m_{(v)}$, $\delta m_{(s)}$, получаем вариационное уравнение. Условие стационарности функционала $\delta\Pi_W = 0$ приводит к уравнениям равновесия пластины при изгибе (1.10.11) — (1.10.13), геометрическим граничным условиям

$$\omega = \omega_*; \quad (\gamma_x - \gamma^*_x) v_x + (\gamma_y - \gamma^*_y) v_y = 0; \\ (\gamma_y - \gamma^*_y) v_x + (\gamma_x - \gamma^*_x) v_y = 0 \quad (2.2.10)$$

и условиям, определяющим физический смысл множителей Лагранжа,

$$\begin{aligned}\lambda &= Q = Q_x v_x + Q_y v_y; \\ m_{(v)} &= M_{(vv)} = M_{xx} v_x^2 + M_{yy} v_y^2 + 2M_{xy} v_x v_y; \\ m_{(s)} &= M_{(vs)} = (M_{yy} - M_{xx}) v_x v_y + M_{xy} (v_x^2 - v_y^2).\end{aligned}\quad (2.2.11)$$

Таким образом, множители Лагранжа имеют смысл внутренних сил на границе контура c_u . Функция λ имеет смысл поперечной силы на контуре, функция $m_{(v)}$ — смысл изгибающего момента по нормали к контуру, функция $m_{(s)}$ — смысл крутящего момента на контуре c_u . Кроме того, из условия стационарности функционала следуют силовые граничные условия (1.10.16) — (1.10.18), кинематические соотношения

$$\begin{aligned}\chi_{xx} &= \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \quad \chi_{yy} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}; \quad 2\chi_{xy} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}; \\ 2\Omega_{x3} &= \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad 2\Omega_{y3} = \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y},\end{aligned}$$

а также физические соотношения

$$\begin{aligned}M_{xx} &= \frac{\partial U_0}{\partial \chi_{xx}} = D_{11} \chi_{xx} + D_{12} \chi_{yy}; \\ M_{yy} &= \frac{\partial U_0}{\partial \chi_{yy}} = D_{12} \chi_{yy} + D_{22} \chi_{xx}; \\ M_{xy} &= \frac{\partial U_0}{\partial (2\chi_{xy})} = 2D_{66} \chi_{xy}; \\ Q_x &= \frac{\partial U_0}{\partial (2\Omega_{x3})} = kA_{55} h 2\Omega_{x3}; \\ Q_y &= \frac{\partial U_0}{\partial (2\Omega_{y3})} = kA_{44} h 2\Omega_{y3}.\end{aligned}\quad (2.2.12)$$

2.3. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ РЕЙСНЕРА

В смешанном вариационном принципе Рейснера функциональными аргументами являются перемещения и внутренние силы. Одновременное варьирование перемещений и внутренних сил позволяет получить более точные значения последних по сравнению с решением на основе принципа минимума потенциальной энергии. При этом точность определения перемещений не снижается. Кроме того, если решение на основе принципов

Лагранжа и Кастильяно дает нижние и верхние оценки для энергии деформации, то решение на основе вариационного принципа Рейснера дает промежуточные значения между верхним и нижним пределами.

2.3.1. Общий случай произвольных оболочек

Прежде чем приступить к выводу функционала смешанного вариационного принципа, определим выражение для удельной дополнительной энергии деформаций. На основе выражения для дополнительной энергии линейно-упругого трехмерного тела (1.2.14) и формул для определения напряжений в однородных по толщине оболочках (1.11.2), (1.11.3), (1.11.14) после интегрирования получаем

$$\begin{aligned}\Phi_0(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha, N_{33}) &= \frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} a_{ijkl} \sigma^{ij} \sigma^{kl} dx_3 = \\ &= -\frac{1}{2} \int_{-h/2}^{h/2} \{ a_{\alpha\beta\gamma\delta} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\delta} + 4a_{\alpha\beta\beta\gamma} \sigma^{\alpha\beta} \sigma^{\gamma\beta} + \\ &+ a_{3333} \sigma^{33} \} dx_3 = \frac{1}{2} \left\{ a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left[\frac{1}{h} N^{\alpha\beta} N^{\gamma\delta} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{12}{h^3} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} \right] + \frac{4a_{\alpha\beta\beta\gamma}}{k} \frac{1}{h} Q^\alpha Q^\beta + \frac{a_{3333}}{k_*} \frac{1}{h} N^{33} N^{33} \right\}. \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

Здесь использованы обозначения для коэффициентов поперечного сдвига k (1.11.7) и поперечного обжатия k_* (1.11.20). На основе функционала (1.2.10) составим смешанный функционал Рейснера для оболочек, деформирование которых описывается соотношениями теории типа Тимошенко, рассмотренными в главе 1:

$$\begin{aligned}\Pi_R = \int_S \left\{ N^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} (v_{\alpha\parallel\beta} + v_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} w \right] + \right. \\ \left. + M^{\alpha\beta} \left[\frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\parallel\beta} + \gamma_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} \gamma \right] + \right. \\ \left. + Q^\alpha [\gamma_\alpha + w_{,\alpha} + b_{\lambda\alpha} v^\lambda] + N^{33} \gamma - \right. \\ \left. - \Phi_0(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha, N_{33}) - q^\alpha v_\alpha - q w \right\} dS - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{c_T} (N_*^\alpha v_\alpha + Q_* w + M_{(v)}^* v^\alpha \gamma_\alpha + \\
& + M_{(vs)}^* \varepsilon_*^\alpha v_\tau \gamma_\alpha) ds - \int_{c_u} \{ (v_\alpha - v_\alpha^*) \lambda^\alpha + (w - w_*) \lambda + \\
& + [(\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) v^\alpha] m_{(v)} + [(\gamma_\alpha - \gamma_\alpha^*) \varepsilon_*^\lambda v_\lambda] m_{(s)} \} ds. \quad (2.3.2)
\end{aligned}$$

Здесь Φ_0 ($N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, Q^α , N_{33}) — удельная дополнительная энергия оболочки, которая определяется через внутренние силы оболочки по формуле (2.3.1). Остальные обозначения такие же, как для функционала обобщенного вариационного принципа (2.2.2). В последнем интеграле функционала (2.3.2) функции λ^α , λ , $m_{(v)}$, $m_{(s)}$ являются множителями Лагранжа, которые введены для учета геометрических граничных условий на части контура c_u . Варьируя функционал (2.3.2) по независимым функциональным аргументам $\delta N^{\alpha\beta}$, $\delta M^{\alpha\beta}$, δQ^α , δN_{33} , δv^α , δw , $\delta \gamma_\alpha$, $\delta \gamma$ и множителям Лагранжа $\delta \lambda^\alpha$, $\delta \lambda$, $\delta m_{(v)}$, $\delta m_{(s)}$, получаем вариационное уравнение. Условие стационарности функционала $\delta \Pi_R = 0$ приводит к уравнениям равновесия оболочки (1.8.7) — (1.8.10), геометрическим граничным условиям на части контура оболочки c_u (2.2.3), силовым граничным условиям на части контура c_T (2.2.4), условиям для определения множителей Лагранжа (2.2.5) и соотношениям между внутренними силами и перемещениями

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Phi_0}{\partial N^{\alpha\beta}} &= \frac{1}{h} a_{\alpha\beta\gamma\delta} N^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (v_{\alpha\parallel\beta} + v_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} w; \\
\frac{\partial \Phi_0}{\partial M^{\alpha\beta}} &= \frac{12}{h^3} a_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\gamma\delta} = \frac{1}{2} (\gamma_{\alpha\parallel\beta} + \gamma_{\beta\parallel\alpha}) - b_{\alpha\beta} \gamma; \\
\frac{\partial \Phi_0}{\partial Q^\alpha} &= \frac{1}{h} \frac{4a_{\alpha 3\beta 3}}{k} Q^\beta = \gamma_\alpha + w_{,\alpha} + b_{\lambda\alpha} v^\lambda; \\
\frac{\partial \Phi_0}{\partial N_{33}} &= \frac{1}{h} \frac{a_{3333}}{k_*} N_{33} = \gamma. \quad (2.3.3)
\end{aligned}$$

Путем интегрирования по частям с учетом выражений для множителей Лагранжа (2.2.5) функционал (2.3.2) можно преобразовать в другой, модифицированный, вариант

$$\begin{aligned}
-\Pi_{RM}^I &= \int_S \{ \Phi_0(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha, N_{33}) + \\
& + (N_{\parallel\beta}^{\alpha\beta} - b_{\lambda\alpha} Q^\lambda + q^\alpha) v_\alpha + (b_{\alpha\beta} N^{\alpha\beta} + Q_{\parallel\alpha}^\alpha + q) w + \\
& + (M_{\parallel\beta}^{\alpha\beta} - Q^\alpha) \gamma_\alpha + (N_{33} - b_{\alpha\beta} M^{\alpha\beta}) \gamma \} dS -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \int_{c_T} \{ (N^{\alpha\beta} v_\beta - N_*^\alpha) v_\alpha + (Q^\alpha v_\alpha - Q_*) w + \\
& + (M^{\alpha\beta} v_\beta - M^*_{(\nu\nu)} v^\alpha - M^*_{(\nu s)} \varepsilon_*^{\tau\alpha} v_\tau) \gamma_\alpha \} ds - \\
& - \int_{c_u} \{ v^*_\alpha N^{\alpha\beta} v_\beta + w_* Q^\alpha v_\alpha + \gamma^*_\alpha M^{\alpha\beta} v_\beta \} ds. \quad (2.3.4)
\end{aligned}$$

В последнем слагаемом интеграла по части контура оболочки c_u проведены следующие преобразования:

$$\begin{aligned}
v^\alpha M^{\lambda\beta} v_\lambda v_\beta &= M^{\alpha\beta} v_\beta; \\
\varepsilon_*^{\lambda\alpha} v_\lambda \varepsilon^*_{\rho\beta} M^{\tau\beta} v_\tau v^\rho &= 0. \quad (2.3.5)
\end{aligned}$$

Здесь для преобразования использованы зависимости [99]

$$\begin{aligned}
v^\alpha v_\lambda &= \delta_\lambda^\alpha; \\
\varepsilon_*^{\lambda\alpha} \varepsilon^*_{\rho\beta} &= \delta_{\rho\beta}^{\lambda\alpha}; \\
\delta_{\tau\beta}^{\lambda\alpha} M^{\tau\beta} &= M^{\lambda\alpha} - M^{\alpha\lambda} = 0, \quad (2.3.6)
\end{aligned}$$

где учтена симметрия тензора моментов для пологих оболочек $M^{\alpha\beta} = M^{\beta\alpha}$. В функционале (2.3.4) имеется 15 независимых функциональных аргументов: 9 внутренних сил и 6 обобщенных перемещений. Функционалы (2.3.2) и (2.3.4) могут быть использованы для построения смешанных и гибридных схем метода конечных элементов. Некоторые другие модификации функционала Рейснера для плоских элементов конструкций будут рассмотрены в параграфе 2.5.

2.3.2. Пластины в декартовых координатах при поперечном изгибе

Рассмотрим однородную по толщине ортотропную пластину, деформирующуюся под действием поперечной нагрузки без мембранных деформаций. Дополнительная энергия (2.3.1) в этом случае принимает вид

$$\begin{aligned}
\Phi_0(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y) &= \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{12}{h^3} a_{\alpha\beta\gamma\delta} M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} + \frac{1}{h} \frac{4a_{\alpha\beta\gamma}}{k} Q^\alpha Q^\beta \right\} = \\
&= \frac{1}{2} \left\{ \frac{12}{h^3} (a_{11} M_{xx}^2 + 2a_{12} M_{xx} M_{yy} + a_{22} M_{yy}^2 + a_{66} M_{xy}^2) + \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{h} \frac{1}{k} (a_{55} Q_x^2 + a_{44} Q_y^2) \right\}. \quad (2.3.7)
\end{aligned}$$

Здесь введены следующие матричные обозначения для компонент тензора податливости:

$$\begin{aligned} a_{1111} &= a_{11} = \frac{1}{E_x}; & a_{2222} &= a_{22} = \frac{1}{E_y}; \\ a_{1122} &= a_{12} = -\frac{\nu_{xy}}{E_x} = -\frac{\nu_{yx}}{E_y}; & 4a_{1212} &= a_{66} = \frac{1}{G_{xy}}; \\ 4a_{1313} &= a_{55} = \frac{1}{G_{xz}}; & 4a_{2323} &= a_{44} = \frac{1}{G_{yz}}, \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

где E_x, E_y — модули упругости; G_{xy}, G_{xz}, G_{yz} — модули сдвига; ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона ортотропного материала в соответствующих направлениях.

Функционал Рейснера (2.3.2) для изгибаемой пластины принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_R = & \int_S \left\{ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + \right. \\ & + Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_y \left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \\ & - \Phi_0(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y) - qw \Big\} dS - \\ & - \int_{c_T} \left\{ Q_* w + M^*_{(v)} (\nu_x \gamma_x + \nu_y \gamma_y) + \right. \\ & + M^*_{(vs)} (\gamma_y \nu_x - \gamma_x \nu_y) \Big\} ds - \int_{c_u} \{ (w - w_*) \lambda + \\ & + [(\gamma_x - \gamma^*_x) \nu_x + (\gamma_y - \gamma^*_y) \nu_y] m_{(v)} + \\ & + [(\gamma_y - \gamma^*_y) \nu_x - (\gamma_x - \gamma^*_x) \nu_y] m_{(s)} \} ds. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Здесь $\lambda, m_{(v)}, m_{(s)}$ — множители Лагранжа. Остальные обозначения такие же, как в функционале обобщенного вариационного принципа (2.2.9). В функционале (2.3.9) всего 11 функциональных аргументов: 5 внутренних сил ($M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y$), 3 перемещения (w, γ_x, γ_y) и 3 множителя Лагранжа ($\lambda, m_{(v)}, m_{(s)}$). Вариация функционала по всем аргументам приводит к вариационному уравнению, из которого следуют уравнения равновесия (1.10.11)–(1.10.13), геометрические граничные условия на части контура c_u (2.2.10), силовые граничные условия на

части контура c_T (1.10.16)—(1.10.18), условия, определяющие множители Лагранжа через внутренние силы на контуре пластины, и соотношения между внутренними силами и перемещениями

$$\begin{aligned}\frac{\partial \Phi_0}{\partial M_{xx}} &= \frac{12}{h^3} (a_{11} M_{xx} + a_{12} M_{yy}) = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial M_{yy}} &= \frac{12}{h^3} (a_{22} M_{yy} + a_{12} M_{xx}) = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}; \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial M_{xy}} &= \frac{12}{h^3} a_{66} M_{xy} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial Q_x} &= \frac{1}{h} \frac{a_{55}}{k} Q_x = \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \\ \frac{\partial \Phi_0}{\partial Q_y} &= \frac{1}{h} \frac{a_{44}}{k} Q_y = \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}.\end{aligned}\quad (2.3.10)$$

Модифицированная форма функционала Рейснера (2.3.4) для пластины в декартовых координатах принимает вид ($dS = dx dy$)

$$\begin{aligned}-\Pi_{RM} &= \int_S \left\{ \Phi_0(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y) + \right. \\ &+ \left(\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + q \right) w + \left(\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x \right) \gamma_x + \\ &+ \left. \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_{yy}}{\partial y} - Q_y \right) \gamma_y \right\} dS - \\ &- \int_{c_T} \{ [Q_x v_x + Q_y v_y - Q_*] w + [M_{xx} v_x + M_{xy} v_y - \\ &- M^*_{(vv)} v_x + M^*_{(vs)} v_y] \gamma_x + [M_{xy} v_x + M_{yy} v_y - M^*_{(vv)} v_y - \\ &- M^*_{(vs)} v_x] \gamma_y \} ds - \int_{c_u} \{ w_* (Q_x v_x + Q_y v_y) + \gamma^*_x (M_{xx} v_x + M_{xy} v_y) + \\ &+ \gamma^*_y (M_{xy} v_x + M_{yy} v_y) \} ds.\end{aligned}\quad (2.3.11)$$

Функционал (2.3.11) имеет 8 независимых функциональных аргументов: 5 внутренних сил (M_{xx} , M_{yy} , M_{xy} , Q_x , Q_y) и 3 перемещения (w , γ_x , γ_y). На основе функционалов (2.3.9) и (2.3.11) могут быть построены смешанные и гибридные схемы метода конечных элементов.

2.4. ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ КАСТИЛЬЯНО

Как известно, функционал Кастильяно является двойственным по отношению к функционалу Лагранжа [169]. Одновременное применение обоих вариационных принципов — принципа минимума потенциальной энергии (принципа Лагранжа) и принципа минимума дополнительной энергии (принципа Кастильяно) позволяет получить верхние и нижние оценки для решения. Кроме того, при одинаковых затратах решением на основе функционалов Кастильяно удастся получить более точные значения внутренних сил, чем решением с помощью функционалов Лагранжа. Однако чисто технические сложности не позволяют широко применять принцип Кастильяно для нелинейных и динамических задач. Поэтому ограничимся рассмотрением функционалов Кастильяно для решения линейных задач статики теории оболочек и пластин.

2.4.1. Общий случай произвольных оболочек

Функционал Кастильяно можно получить из модифицированной формы функционала Рейснера (2.3.4), если учесть, что в вариационном принципе Кастильяно уравнения равновесия (1.8.7) — (1.8.10) принимаются за предварительные условия, которые должны удовлетворяться заранее. Кроме того, как предварительно заданные принимаются силовые граничные условия на части контура c_T (2.2.4). С учетом этого из функционала (2.3.4) после его умножения на -1 получаем функционал Кастильяно:

$$\begin{aligned} \Pi_K = & \int_S \Phi_0(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha, N_{33}) dS - \\ & - \int_{c_u} \{v_\alpha^* N^{\alpha\beta} v_\beta + w_* Q^\alpha v_\alpha + \gamma_\alpha^* M^{\alpha\beta} v_\beta\} ds. \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

Здесь $\Phi_0(N^{\alpha\beta}, M^{\alpha\beta}, Q^\alpha, N_{33})$ — удельная дополнительная энергия оболочки, которая выражается через внутренние силы по формулам (2.3.1). В функционале (2.4.1) всего 9 независимых функциональных аргументов: 9 внутренних сил $N^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, Q^α , N_{33} . На основе функционала (2.4.1) формулируется принцип минимума дополнительной энергии. Условие стационарности функционала (2.4.1)

$$\delta \Pi_K = 0 \quad (2.4.2)$$

совместно с уравнениями равновесия (1.8.7)—(1.8.10) и силовыми граничными условиями (2.2.4) приводит к решению задачи. Согласно принципу минимума дополнительной энергии среди статически допустимых внутренних сил, удовлетворяющих условиям (1.8.7)—(1.8.10) и (2.2.4), истинными являются те, которые приводят к минимуму функционала (2.4.1).

Отметим, что перемещения v_α , w , γ_α , γ служат множителями Лагранжа в функционале (2.3.4), чтобы ввести в функционал (2.4.1) его предварительные условия (1.8.7)—(1.8.10) и (2.2.4).

2.4.2. Пластины в декартовых координатах при поперечном изгибе

Функционал Кастильяно для пластины при поперечном изгибе может быть получен из модифицированного функционала Рейснера (2.3.11), если принять в качестве предварительных условий уравнения равновесия (1.10.11)—(1.10.13) и силовые граничные условия на части контура c_T (1.10.16)—(1.10.18). С учетом этого и формулы (2.3.7) для удельной дополнительной энергии ортотропной пластины функционал Кастильяно имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_K = & \frac{1}{2} \int_S \left\{ \frac{12}{h^3} (a_{11} M_{xx}^2 + 2a_{12} M_{xx} M_{yy} + \right. \\ & + a_{22} M_{yy}^2 + a_{66} M_{xy}^2) + \frac{1}{h} \left(\frac{a_{55}}{k} Q_x^2 + \frac{a_{44}}{k} Q_y^2 \right) \Big\} dS - \\ & - \int_{c_u} \{ w_* (Q_x v_x + Q_y v_y) + \gamma_*^x (M_{xx} v_x + M_{xy} v_y) + \\ & + \gamma_*^y (M_{xy} v_x + M_{yy} v_y) \} ds. \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

Применение функционалов Кастильяно в схемах метода конечных элементов даже для линейных задач связано с определенными техническими трудностями. Во-первых, трудности возникают в связи с учетом внешних нагрузок в схеме решения, так как они непосредственно не входят в минимизируемый функционал. Во-вторых, в некоторых случаях для криволинейных элементов трудности возникают при выборе аппроксимации для внутренних сил, которая удовлетворяет уравнениям равновесия. Поэтому в настоящее время в методе конечных элементов функционалы Кастильяно используются значительно меньше, чем функционалы Лагранжа, Рейснера и их модификации.

2.5. МОДИФИЦИРОВАННЫЕ ФОРМЫ ФУНКЦИОНАЛА РЕЙСНЕРА

Как уже отмечалось, смешанные вариационные принципы могут эффективно применяться для построения гибридных схем метода конечных элементов. Например, модификация функционала Рейснера в виде (1.2.18) успешно применялась в ряде работ при решении задач деформирования однородных и слоистых пластин [117, 155—160]. Ограничимся рассмотрением данного функционала для изгибаемой пластины в декартовых координатах и изгибаемой в одной плоскости балки.

2.5.1. Пластины в декартовых координатах при поперечном изгибе

Из функционала (1.2.18) по аналогии с функционалом (2.3.9) получаем модифицированную форму функционала Рейснера:

$$\begin{aligned} \Pi_{RM} = \int_S \left\{ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + M_{yy} \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} + M_{xy} \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) + Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) + Q_y \left(\gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y} \right) - \right. \\ \left. - \Phi_0(M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y) - q w \right\} dS - \\ - \int_{c_T} \left\{ Q_* w + M^*_{(vv)} (v_x \gamma_x + v_y \gamma_y) + M^*_{(vs)} (\gamma_y v_x - \gamma_x v_y) \right\} ds. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

При этом, как и в (1.2.18), предполагается, что заранее выполняются уравнения равновесия (1.10.16)—(1.10.18) и геометрические граничные условия на части контура пластины c_u (2.2.10). Функционал (2.5.1) можно использовать для построения гибридных конечных элементов изгибаемых пластин.

2.5.2. Балки при плоском изгибе

Для балки длиной l и шириной $b=1$ (см. рис. 1.9) при изгибе в плоскости xz функционал (1.2.18) принимает вид

$$\begin{aligned} \Pi_{RM} = \int_0^l \left\{ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) - \Phi_0(M_{xx}, Q_x) - \right. \\ \left. - q w \right\} dx - P_* w(x_i) - M_* \gamma_x(x_j). \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

При этом заранее должны выполняться уравнения равновесия

$$\frac{\partial M_{xx}}{\partial x} = Q_x; \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} = q \quad (2.5.3)$$

и геометрические граничные условия на функции w и γ_x в точках закрепления $x = x_h$

$$w = w_*; \quad \gamma_x = \gamma^*_x \quad \text{при} \quad x = x_h. \quad (2.5.4)$$

При линейном распределении нормальных напряжений по высоте балки

$$\sigma_{xx} = \frac{12}{h^3} z M_{xx} \quad (2.5.5)$$

и при параболическом распределении напряжений поперечных сдвигов по высоте балки

$$\sigma_{xz} = \frac{1}{h} Q_x \left[\frac{1}{4} - \left(\frac{z}{h} \right)^2 \right] \quad (2.5.6)$$

удельная дополнительная энергия в функционале (2.5.2) выражается через внутренние силы следующим образом:

$$\Phi_0(M_{xx}, Q_x) = \frac{1}{2} \left\{ \frac{12 M_{xx}^2}{h^3 E_x} + \frac{6 Q_x^2}{5 h G_{xz}} \right\}. \quad (2.5.7)$$

Здесь E_x — модуль упругости в направлении оси балки; G_{xz} — модуль поперечного сдвига.

В выражении (2.5.7) для определения дополнительной энергии коэффициент поперечного сдвига $k = 5/6$, если для напряжений σ_{xz} принято квадратичное распределение по высоте балки.

Интегрируя функционал (2.5.2) два раза по частям с учетом первого уравнения равновесия (2.5.3), получаем

$$\begin{aligned} \Pi_{RM}^{\text{III}} = \int_0^l \left\{ -M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \left[\frac{12 M_{xx}^2}{h^3 E_x} + \frac{6 (M_{xx,x})^2}{5 h G_{xz}} \right] - \right. \\ \left. - q w \right\} dx - P_* w(x_i) + M_* w_{,x}(x_j). \end{aligned} \quad (2.5.8)$$

В результате этих преобразований число неизвестных функций сократилось от четырех в функционале (2.5.2) до двух в функционале (2.5.8). Однако в этом случае не удалось корректно записать работу заданного момента M_* на угол поворота. Тем не менее на основе функционала (2.5.8) с минимальным числом неизвестных можно построить гибридные конечные элементы изгибаемой балки с учетом поперечных сдвигов.

ВАРИАЦИОННЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕТОДА ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК ТИПА ТИМОШЕНКО

3.1. ВВЕДЕНИЕ

Многие проблемы деформирования тонкостенных оболочек необходимо рассматривать на основе нелинейных или линеаризованных соотношений. К таким проблемам относятся определение несущей способности оболочек из мягких материалов, нелинейные колебания оболочек, статическая и динамическая устойчивость оболочек.

Вывод соотношений различных нелинейных теорий оболочек базируется на уравнениях нелинейной теории упругости [34, 35, 43, 99]. Нелинейная теория оболочек развита главным образом на базе классической гипотезы Кирхгофа—Лява. Различные аспекты классической нелинейной теории оболочек освещены в работах [40, 108, 109, 114, 152 и др.]. Нелинейная теория оболочек на базе гипотезы Тимошенко рассмотрена в работах [2, 3, 15, 18, 19, 53, 76]. Применение же нелинейной теории типа Тимошенко в решении нелинейных задач деформирования оболочек ограничивается лишь работами [67, 68]. Причем, как и при использовании в методе конечных элементов классической нелинейной теории оболочек, рассматривается лишь вариант нелинейной теории, когда мембранные и изгибные деформации считаются малыми, а повороты — умеренно большими. Такие упрощения значительно облегчают получение основных соотношений метода конечных элементов для решения нелинейных задач деформирования оболочек. На базе этих соотношений можно решать весьма разнообразные задачи нелинейного деформирования тонкостенных оболочек.

Схемы метода конечных элементов для решения нелинейных задач деформирования оболочек в большинстве случаев строятся на основе принципа возможных перемещений или на основе вариационного принципа Лагранжа. Принцип Лагранжа в нелинейной теории оболочек можно назвать лишь принципом стационарности потенциальной энергии, так как в общем случае нелинейного деформирования потенциальная энергия не имеет единственного минимума даже в случае действия на упругую оболочку внешних консервативных сил, имеющих потенциал.

В общем случае нелинейного деформирования оболочек чередуются устойчивые и неустойчивые состояния равновесия и решение не является единственным. Лишь в некоторых частных случаях можно указать условия, при которых потенциальная энергия имеет минимум. Такие условия приведены, например, в работе [161].

Несмотря на указанные ограничения принцип стационарности потенциальной энергии успешно применяется при решении задач устойчивости и нелинейного деформирования оболочек методом конечных элементов. Нелинейные соотношения могут быть представлены в лагранжевом или в эйлеровом представлении [34, 35]. В нелинейной механике конечных элементов распространение получило так называемое естественное представление [80, 81]. В настоящей работе при определении основных соотношений, описывающих нелинейное деформирование конструкций, применяется лагранжево представление искомых величин.

3.2. ПРИНЦИП СТАЦИОНАРНОСТИ ПОТЕНЦИАЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Функционал потенциальной энергии в нелинейной теории упругости имеет вид, аналогичный виду функционала (1.2.16) для линейных задач. Как и в параграфе 1.2, ограничимся рассмотрением трехмерного тела в декартовых координатах. Предполагается, что массовые силы F_i и заданные на части поверхности тела S_T внешние нагрузки имеют потенциал. Кроме того, предполагается, что потенциал существует также для внутренних сил и удельная энергия упругих деформаций представляется в виде

$$U_0[e_{ij}(u_i)] = \frac{1}{2} A^{ijkl} e_{ij} e_{kl}, \quad (3.2.1)$$

т. е. что задан закон связи напряжений и деформаций в виде закона Гука (1.2.13). Деформации в (3.2.1) определяются через перемещения u_i по зависимостям [34, 35, 99, 169]

$$2e_{ij} = u_{i,j} + u_{j,i} + u_{k,i} u_{k,j}, \quad (3.2.2)$$

или через вектор перемещения $\mathbf{u} = u_i \mathbf{g}^i$ по зависимостям

$$2e_{ij} = \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j + \mathbf{u}_{,j} \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{u}_{,j}. \quad (3.2.3)$$

Кроме того, предполагается, что на части поверхности тела S_u заданы геометрические граничные условия

$$u_i = u_i^* \text{ на } S_u. \quad (3.2.4)$$

Таким образом, при заданных предварительных условиях (3.2.1), (3.2.2), (3.2.4) можно сформулировать принцип стационарности потенциальной энергии тела:

$$\delta\Pi=0, \quad (3.2.5)$$

$$\Pi = \int_V \{U_0(u_i) - F^i u_i\} dV - \int_{S_T} T_*^i u_i dS. \quad (3.2.6)$$

В этом функционале функциональными аргументами являются перемещения u_i , которые могут быть большими. На основе функционала (3.2.6) формулируется вариационный принцип: среди кинематически допустимых перемещений, удовлетворяющих условиям (3.2.4), условиям дифференцируемости (3.2.2) и определению (3.2.1), истинны те перемещения, которые приводят функционал (3.2.6) к стационарному значению.

В отличие от функционала потенциальной энергии для линейных задач функционал (3.2.6) может не иметь минимума, так как деформации определяются через перемещения по нелинейным зависимостям. Условие стационарности (3.2.5) функционала потенциальной энергии приводит к уравнениям равновесия при нелинейном деформировании [169]

$$[(\delta_j^i + u^i_{,j}) \sigma^{kj}]_{,k} + F^i = 0 \quad (3.2.7)$$

и к естественным граничным условиям на части поверхности S_T , где заданы внешние силы T_*^i ,

$$T_*^i = \sigma^{kj} v_k (\delta_j^i + u^i_{,j}). \quad (3.2.8)$$

Здесь $v_k = i_k \cdot v$, где $v = v^k i_k$ — единичный вектор внешней нормали к поверхности тела S_T . Аналогично можно получить функционал смешанного типа (Рейснера) при нелинейных деформациях [169].

3.2.1. Энергетический критерий устойчивости

Среди состояний равновесия, которые можно определить из уравнения (3.2.5), необходимо выделить устойчивые и неустойчивые. Очевидно, при малых внешних нагрузках соотношение между внешними силами и перемещениями мало отличается от линейного и состояние равновесия будет устойчивым. При увеличении внешних нагрузок, особенно это относится к тонкостенным конструкциям, состояние устойчивого равновесия может смениться на состояние неустойчивого равновесия. В этой точке нагружения конструкция переходит из начального устойчивого состояния равновесия в смежное состояние равновесия.

Пусть в начальном и смежном состояниях будут перемещения u_i и $u_i + \delta u_i$ и потенциальная энергия $\Pi(u_i)$ и $\Pi(u_i + \delta u_i)$ соответственно. Разлагая в ряд потенциальную энергию в окрестности смежного состояния равновесия, получаем

$$\Pi(u_i + \delta u_i) = \Pi(u_i) + \delta \Pi + \delta^2 \Pi + \dots, \quad (3.2.9)$$

где $\delta \Pi$, $\delta^2 \Pi, \dots$ — первая, вторая, ... вариации потенциальной энергии. Эти функции содержат линейные, квадратные и т. д. члены от возмущенных перемещений δu_i и их производных. При этом они содержат в качестве постоянных коэффициентов перемещения в начальном состоянии. Так как начальное состояние является равновесным,

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.2.10)$$

и устойчивые и неустойчивые состояния определяет вторая вариация $\delta^2 \Pi$ потенциальной энергии. Так как в (3.2.6) силы F_i^* и T_{*i}^i , имеющие потенциал, не зависят от перемещений, то вторая вариация потенциальной энергии определяется в виде

$$\delta^2 \Pi = \frac{1}{2} \int_V \left\{ \frac{\partial^2 U_0}{\partial e_{ij} \partial e_{kl}} \delta e_{ij} \delta e_{kl} + \sigma^{ij} \delta u_{,j}{}^{,k} \delta u_{,i}{}^{,k} \right\} dV. \quad (3.2.11)$$

Здесь σ^{ij} — напряжения в начальном состоянии и

$$2\delta e_{ij} = (\delta_i{}^k + u_{,i}{}^k) \delta u_{,j}{}^{,k} + (\delta_j{}^k + u_{,j}{}^k) \delta u_{,i}{}^{,k}. \quad (3.2.12)$$

Если $\delta^2 \Pi > 0$, то состояние равновесия устойчивое, а если $\delta^2 \Pi < 0$, то состояние равновесия неустойчивое. Таким образом, условие для определения критической нагрузки, определяемой как нагрузка, при которой устойчивое состояние равновесия переходит в неустойчивое, будет иметь вид

$$\delta^2 \Pi = 0. \quad (3.2.13)$$

Так как в линейной теории всегда $\delta^2 \Pi > 0$, на основе линейной теории можно лишь установить устойчивое состояние равновесия, но невозможно определить критические нагрузки. Типичным примером конструкции, для анализа которой следует применять нелинейные соотношения, является пологая арка под действием поперечной нагрузки (рис. 3.1). Кривая нагрузка—прогиб отражает устойчивые (сплошные линии) и неустойчивые (штрихпунктирные линии) состояния равновесия. Решение на основе линейной теории (штриховая линия) не может дать качественно правильного описания поведения конструкции под нагрузкой. Исходя из нелинейного функционала (3.2.11), путем

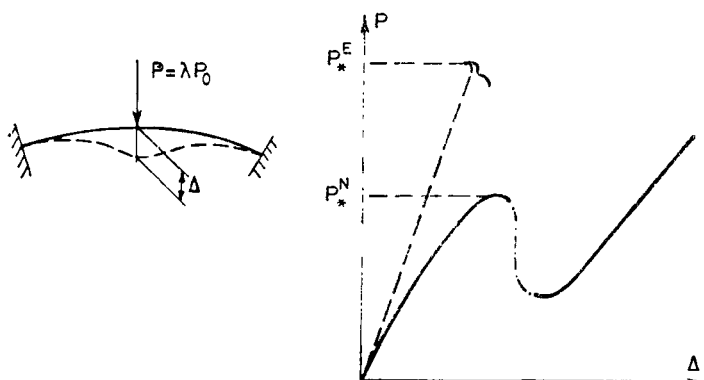


Рис. 3.1. Потеря устойчивости пологой арки под действием поперечной нагрузки

его линеаризации можно сформулировать линеаризованную проблему устойчивости. Предположим, что все внешние силы в начальном (докритическом) состоянии, которое определяется по линейной теории, меняются пропорционально одному параметру λ , т. е. $\sigma^{ij} = \lambda \sigma^{ij}_{(0)}$, и напряжения σ^{ij} в критическом состоянии имеют конечные значения. В то же время возмущенные перемещения u_i и деформации e_{ij} бесконечно малы (опущен знак вариации для возмущенных величин). Тогда возмущенные деформации определяются по линейным соотношениям

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \quad (3.2.14)$$

При этих предположениях из (3.2.11) с учетом (3.2.1) имеем следующий функционал потенциальной энергии возмущенного состояния в момент потери устойчивости [35, 169]:

$$\begin{aligned} \Pi_E = \frac{1}{2} \int_V \left\{ A^{ijkl} \frac{1}{4} (u_{i,j} + u_{j,i}) (u_{k,l} + u_{l,k}) + \right. \\ \left. + \lambda \sigma_{(0)}^{ij} u_{,j} u_{,i} \right\} dV. \end{aligned} \quad (3.2.15)$$

Из условия стационарности этого функционала (варьируются возмущенные перемещения δu_i)

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.2.16)$$

получаем уравнение для определения собственных значений при нетривиальных значениях возмущенных перемещений $u_i \neq 0$.

Наименьшее собственное значение этого уравнения определяет критический параметр нагрузки λ_* и, следовательно, критическую нагрузку потери устойчивости. Следует, однако, отметить, что иногда вышеуказанная линейаризация приводит к завышенным критическим нагрузкам. Например, при потере устойчивости пологой арки (см. рис. 3.1) критическая нагрузка бифуркации P_{*E} по линейаризованной теории получается завышенной по сравнению с критической (предельной) нагрузкой P_{*N} , полученной из нелинейного анализа. Тем не менее во многих случаях применение линейаризованного подхода приводит к весьма точным значениям критической нагрузки. Поэтому в методе конечных элементов определение критических нагрузок на основе линейаризованного подхода получило широкое распространение.

3.3. КИНЕМАТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Таким же образом, как в параграфе 1.3 для линейного случая, из соотношений (3.2.3) трехмерной теории упругости получим нелинейные кинематические соотношения для теории оболочек на основе гипотезы Тимошенко (1.3.3). Полные нелинейные кинематические соотношения в теории оболочек типа Тимошенко получены в работах [18, 53, 76]. Рассмотрим вариант пологих оболочек, когда пренебрегается изменением метрического тензора по толщине оболочки. В этом случае из соотношений (П1.6), (П1.7), (П1.8) и (П1.13), (П1.17), (П1.21) имеем

$$\begin{aligned}\mu^{\alpha\beta} &= \delta_{\beta}^{\alpha}; & g_{\alpha} &= a_{\alpha}; & g^{\alpha} &= a^{\alpha}; & (\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} &= \delta_{\beta}^{\alpha}; \\ \mu &= 1; & g_{\alpha\beta} &= a_{\alpha\beta}; & g^{\alpha\beta} &= a^{\alpha\beta}; \\ T_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} &= T_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s}.\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

Таким образом, с учетом предположения (3.3.1) компоненты тензора на любой эквидистантной поверхности оболочки равны компонентам тензора в базисе срединной поверхности оболочки.

В связи с этим предположением трехмерные кинематические соотношения (3.2.3) могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}2e_{\alpha\beta} &= \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_{\beta} + \mathbf{u}_{,\beta} \cdot \mathbf{a}_{\alpha} + \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{u}_{,\beta}; \\ 2e_{\alpha 3} &= \mathbf{u}_{,\alpha} \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{a}_{\alpha} + \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{u}_{,\alpha}; \\ 2e_{33} &= 2\mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{a}_3 + \mathbf{u}_{,3} \cdot \mathbf{u}_{,3}.\end{aligned}\tag{3.3.2}$$

Используя в (3.3.2) кинематическую гипотезу (1.3.3), формулу Вейнгартена (П1.5), соотношение для производной базисного

вектора (1.3.8) и определение операции ковариантного дифференцирования (П1.22), имеем

$$\begin{aligned} 2e_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} + \varepsilon_{\alpha}^{\nu}\varepsilon_{\nu\beta} + \Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} + \\ &+ x_3(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha} + k_{\alpha}^{\nu}\varepsilon_{\nu\beta} + k_{\beta}^{\lambda}\varepsilon_{\lambda\alpha} + \varphi_{\beta}\Psi_{\alpha}) + \\ &+ (x_3)^2(k_{\alpha}^{\nu}k_{\nu\beta} + \varphi_{\alpha}\varphi_{\beta}); \\ 2e_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha} + \Psi_{\alpha} + \gamma_{\nu}\varepsilon_{\alpha}^{\nu} + \gamma\Psi_{\alpha}; \\ 2e_{33} &= 2\gamma + \gamma^{\alpha}\gamma_{\alpha} + \gamma^2. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Здесь для деформаций $\varepsilon_{\alpha\beta}$ и поворотов Ψ_{α} , φ_{α} введены обозначения (1.3.10). При допущении, что деформации $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $k_{\alpha\beta}$ и γ малы по сравнению с поворотами Ψ_{α} , соотношения (3.3.3) упрощаются следующим образом:

$$\begin{aligned} 2e_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha} + \Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} + x_3(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}); \\ 2e_{\alpha 3} &= \gamma_{\alpha} + \Psi_{\alpha}; \\ 2e_{33} &= 2\gamma. \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

С учетом введенных обозначений (1.3.12) для симметричных тензоров мембранных и изгибных деформаций

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}); \\ \chi_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}(k_{\alpha\beta} + k_{\beta\alpha}) \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

соотношения (3.3.4) принимают вид

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha\beta} + \frac{1}{2}\Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} + x_3\chi_{\alpha\beta}; \\ 2e_{\alpha 3} &= 2\Omega_{\alpha 3}; \\ e_{33} &= \gamma. \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Эти соотношения могут быть записаны в виде суммы линейных и нелинейных слагаемых:

$$\begin{aligned} e_{\alpha\beta} &= \Omega_{\alpha\beta}^{(1)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} + x_3\chi_{\alpha\beta}^{(1)}; \\ 2e_{\alpha 3} &= 2\Omega_{\alpha 3}^{(1)}; \\ e_{33} &= \Omega_{33}^{(1)}, \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

где

$$\begin{aligned} \Omega_{\alpha\beta}^{(1)} &= \Omega_{\alpha\beta}; \quad \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2}\Psi_{\alpha}\Psi_{\beta} \approx \frac{1}{2}\omega_{,\alpha}\omega_{,\beta}; \\ \chi_{\alpha\beta}^{(1)} &= \chi_{\alpha\beta}; \\ 2\Omega_{\alpha 3}^{(1)} &= 2\Omega_{\alpha 3}; \quad \Omega_{33}^{(1)} = \gamma. \end{aligned}$$

Соотношения (3.3.6) описывают деформирование полой оболочки при малых деформациях и умеренных поворотах вокруг координатных осей x^α . Повороты вокруг нормали оболочки считаются малыми. Многие задачи деформирования и потери устойчивости тонкостенных оболочек из жесткого материала могут быть описаны этими соотношениями. Из (3.3.6) могут быть получены соотношения для каждого частного случая оболочек различных форм (цилиндрических, конических, сферических и т. д.). Например, для пластины в декартовых координатах соотношения (3.3.6) принимают следующий вид ($z = x_3$):

$$\begin{aligned} e_{xx} &= \Omega_{xx} + \frac{1}{2} \Psi_x \Psi_x + z \chi_{xx}; \\ e_{yy} &= \Omega_{yy} + \frac{1}{2} \Psi_y \Psi_y + z \chi_{yy}; \\ 2e_{xy} &= 2\Omega_{xy} + \Psi_x \Psi_y + 2z \chi_{xy}; \\ 2e_{xz} &= 2\Omega_{xz}; \quad 2e_{yz} = 2\Omega_{yz}; \\ e_{zz} &= \gamma. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Omega_{xx} &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad \Omega_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad 2\Omega_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \chi_{xx} &= \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \quad \chi_{yy} = \frac{\partial \gamma_y}{\partial y}; \quad 2\chi_{xy} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x}; \\ 2\Omega_{xz} &= \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}; \quad 2\Omega_{yz} = \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y}; \\ \Psi_x &= \frac{\partial w}{\partial x}; \quad \Psi_y = \frac{\partial w}{\partial y}. \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

При решении линеаризованных задач устойчивости удобно энергию деформации в начальном послекритическом состоянии представить в виде квадратичной формы от возмущенных деформаций. Для этого используем представление нелинейного тензора деформаций (3.2.3), записанного в бескоординатной форме [34, 35]:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \frac{1}{2} \nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T. \quad (3.3.10)$$

Здесь $\mathbf{E} = e_{ij} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^j$ — тензор конечных деформаций; $\nabla = \frac{\partial}{\partial x^i} \mathbf{g}^i$ — оператор Гамильтона; $\mathbf{e}$ — линейный тензор деформаций:

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]. \quad (3.3.11)$$

Вводим кососимметричный тензор спина деформаций [34, 35]:

$$\Omega = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{u}]^T - \nabla \otimes \mathbf{u}, \quad (3.3.12)$$

или, в координатной форме,

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} (\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{u}_{,j} - \mathbf{u}_{,i} \cdot \mathbf{g}_j).$$

Комбинируя (3.3.11) и (3.3.12), получаем

$$\begin{aligned} (\nabla \otimes \mathbf{u})^T &= \mathbf{e} + \Omega; \\ \nabla \otimes \mathbf{u} &= \mathbf{e} - \Omega. \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Подставляя выражения для градиентов перемещений (3.3.13) в (3.3.10), получаем [34, 35]

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \mathbf{e} + \frac{1}{2} (\mathbf{e} - \Omega) \cdot (\mathbf{e} + \Omega) = \\ &= \mathbf{e} + \frac{1}{2} (\mathbf{e}^2 + \mathbf{e} \cdot \Omega - \Omega \cdot \mathbf{e} - \Omega^2). \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

Сопутствующий тензору Ω вектор поворота ω определяется через перемещения в виде [34, 35]

$$\omega = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} u_{j,i} \mathbf{g}^k = \frac{1}{2} \nabla \otimes \mathbf{u} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \mathbf{u}. \quad (3.3.15)$$

Отметим, что компоненты тензора Ω и вектора поворота ω связывают зависимости

$$\Omega_{ij} = \varepsilon_{kji} \omega_k. \quad (3.3.16)$$

Здесь ε_{ijk} — трехмерные символы Леви—Чивитта. Три компоненты вектора поворота согласно (3.3.16) определяются через три компоненты кососимметричного тензора Ω :

$$\omega_1 = \sqrt{g} \Omega_{32}; \quad \omega_2 = \sqrt{g} \Omega_{13}; \quad \omega_3 = \sqrt{g} \Omega_{21}. \quad (3.3.17)$$

Используя соотношение (3.3.15), находим выражение для квадрата тензора Ω :

$$\begin{aligned} \Omega^2 &= \Omega \cdot \Omega = \Omega_{ij} \Omega_{jk} \mathbf{g}^i \otimes \mathbf{g}^k = \\ &= \omega \otimes \omega - \mathbf{g} \otimes \omega \cdot \omega. \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

Для остальных нелинейных членов в (3.3.14) имеем представления [34, 35]

$$\Omega \cdot \mathbf{e} = \omega \times \mathbf{e}; \quad \mathbf{e} \cdot \Omega = -(\omega \times \mathbf{e})^T.$$

С учетом этих соотношений и (3.3.18) выражение для тензора конечных деформаций (3.3.14) представляется в виде

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \frac{1}{2} [\mathbf{e}^2 + \mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e} - (\boldsymbol{\omega} \otimes \mathbf{e})^T]. \quad (3.3.19)$$

При потере устойчивости тонкостенных оболочек или пластин компоненты линейного тензора деформации $\mathbf{e}$ имеют более высокий порядок малости по сравнению с компонентами вектора поворота $\boldsymbol{\omega}$. В этом случае в (3.3.19) из нелинейных слагаемых сохраняются только квадратичные относительно $\boldsymbol{\omega}$ члены:

$$\mathbf{E} = \mathbf{e} + \frac{1}{2} [\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.3.20)$$

Далее находим представление для вектора поворота в теории оболочек типа Тимошенко. Подставляя (1.3.3) в (3.3.15), с учетом допущения о пологости оболочки (3.3.1) получаем

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda} + x_3 \boldsymbol{\tau}. \quad (3.3.21)$$

Здесь компоненты двумерных векторов $\boldsymbol{\lambda} = \lambda^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \lambda_3 \mathbf{a}_3$ и $\boldsymbol{\tau} = \tau^\alpha \mathbf{a}_\alpha + \tau_3 \mathbf{a}_3$ выражаются в виде

$$\begin{aligned} \lambda^\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon_*^{\alpha\beta} [\omega_{,\beta} + b_{\beta\lambda} v^\lambda - \gamma_\beta]; & \lambda_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon_*^{\alpha\beta} v_{\beta\parallel\alpha}; \\ \tau^\alpha &= \frac{1}{2} \varepsilon_*^{\alpha\beta} [\gamma_{,\beta} + b_\beta^\lambda \gamma_\lambda]; & \tau_3 &= \frac{1}{2} \varepsilon_*^{\alpha\beta} \gamma_{\beta\parallel\alpha}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Далее с учетом предыдущих предположений, что линейные мембранные деформации, повороты ω_3 вокруг оси x_3 , деформации поперечного сдвига (и, следовательно, γ_α) имеют более высокий порядок малости по сравнению с поворотами вокруг координатных осей x^α , для представления квадратичных слагаемых в (3.3.20) можно вместо (3.3.21) использовать зависимость

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (3.3.23)$$

При этом, так как при нелинейном деформировании линейные деформации поперечного сдвига несут существенны по сравнению с поворотами вокруг координатных осей x^α , ими можно пренебречь. Для определения компонент вектора $\boldsymbol{\lambda}$ по соотношению (3.3.22) из (1.3.10) и (1.3.12) при $\Omega_{\alpha 3} = 0$ имеем $\gamma_\alpha = -\Psi_\alpha = -\omega_{,\alpha}$. С учетом вышеизложенных упрощений компоненты вектора $\boldsymbol{\lambda}$

$$\lambda^\alpha = \varepsilon_*^{\alpha\beta} \omega_{,\beta}; \quad \lambda_3 = 0. \quad (3.3.24)$$

Физические компоненты вектора поворота согласно (П1.24) и (П1.18) выражаются в виде

$$\begin{aligned}\omega_{(1)} = \lambda_{(1)} &= \frac{1}{\sqrt{a_{22}}} \frac{\partial \omega}{\partial x^2}; \\ \omega_{(2)} = \lambda_{(2)} &= - \frac{1}{\sqrt{a_{11}}} \frac{\partial \omega}{\partial x^1}; \\ \omega_{(3)} = \lambda_{(3)} &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.25}$$

Соотношения (3.3.25) обычно применяются в решении задач устойчивости тонкостенных оболочек. При этом в теории оболочек типа Тимошенко с учетом указанных упрощений и в классической теории оболочек имеем одинаковые выражения для компонент вектора поворота. В настоящей работе при решении задач устойчивости оболочек в соотношениях (3.3.20) для компонент вектора поворота используется представление (3.3.25).

3.4. ЭНЕРГИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДЕФОРМАЦИЙ

Принципом стационарности потенциальной энергии можно пользоваться, если для всех сил (внутренних и внешних) существует потенциал. Функционал Лагранжа, как и в линейной теории, определяется разностью функционалов энергии деформаций U и работы внешних сил W :

$$\Pi = U - W.\tag{3.4.1}$$

При внешних силах, которые не зависят от перемещений, функционалы работы в нелинейной и линейной теориях совпадают. Функционалы работы в линейной теории были рассмотрены в параграфе 1.6. В данном случае вторая вариация функционала работы внешних сил равна нулю:

$$\delta^2 W = 0.\tag{3.4.2}$$

В некоторых случаях, например при гидростатическом нагружении опертой оболочки, можно определять функционал работы с учетом деформирования оболочки. В этом частном случае внешние силы можно считать консервативными. Однако здесь $\delta^2 W \neq 0$. В методе конечных элементов это порождает несимметричную матрицу касательной жесткости, что затрудняет применение стандартных алгоритмов. Как показал анализ решения линеаризованной задачи потери устойчивости оболочки при внешнем давлении, влияние на критическую силу нелинейных слагаемых в функционале работы ($\delta^2 W \neq 0$) составляет 3—8%. Поэтому в дальнейшем будем пренебрегать нелинейно-

стями в функционале работы внешних сил и считать, что выполняется условие (3.4.2).

Функционал энергии деформаций, представленных соотношениями (3.3.6)—(3.3.7), имеет вид

$$U = \frac{1}{2} \int_S \{ N^{\alpha\beta} [\Omega_{\alpha\beta}^{(1)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(2)}] + M^{\alpha\beta} \chi_{\alpha\beta} + \\ + 2Q^\alpha \Omega_{\alpha 3} + N^{33} \Omega_{33} \} dS. \quad (3.4.3)$$

Здесь внутренние силы должны быть выражены через деформации по соотношениям (1.5.5) с учетом нелинейных слагаемых для мембранных деформаций:

$$\Omega_{\alpha\beta} = \Omega_{\alpha\beta}^{(1)} + \Omega_{\alpha\beta}^{(2)} = \frac{1}{2} (\varepsilon_{\alpha\beta} + \varepsilon_{\beta\alpha}) + \frac{1}{2} \Psi_\alpha \Psi_\beta. \quad (3.4.4)$$

Далее в функционале (3.4.3) деформации должны быть выражены через перемещения по зависимостям (3.4.4), (3.3.5) и (1.3.10). В итоге получаем нелинейный функционал от шести функций перемещений

$$U = U(v^\alpha, w, \gamma^\alpha, \gamma). \quad (3.4.5)$$

Большинство методов решения нелинейных задач, например методы Ньютона, основаны на квадратичной аппроксимации функционала (3.4.5) в окрестности текущего состояния. При решении нелинейных задач на каждом шаге минимизируется квадратичный функционал, а точное значение энергии по (3.4.5) вычисляется только через определенное число шагов для устранения невязки в уравнениях равновесия. Более подробно способ квадратичной аппроксимации энергии деформаций оболочки будет рассмотрен при решении конкретных задач в главе 6.

3.4.1. Энергия деформаций в начальном послекритическом состоянии

Рассмотрим деформирование тонкостенной конструкции при внешних нагрузках, которые меняются пропорционально одному параметру λ (рис. 3.2.). Пусть по линейной теории определено начальное состояние равновесия (состояние a), которое характеризует вектор перемещения u_0 . В некоторой точке нагружения λ_* может существовать смежное состояние равновесия (состояние b). Параметр λ_* определяет критическую нагрузку, при которой конструкция теряет устойчивость с переходом от начального состояния равновесия в смежное состояние равновесия. Рассматривая малые возмущения исходного состояния, оп-

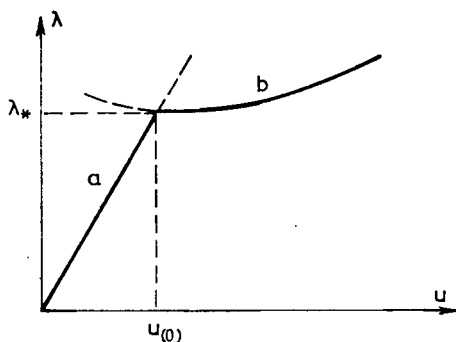


Рис. 3.2. К определению потери устойчивости

ределяем смежное состояние равновесия как начальное послекритическое состояние (состояние b). Полные перемещения в начальном послекритическом состоянии $\mathbf{u}_{(b)}$ определяются в виде суммы перемещений начального состояния и возмущенных перемещений $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_{(b)} = \mathbf{u}_{(0)} + \alpha \mathbf{u}. \quad (3.4.6)$$

Здесь α — малый параметр (в параграфе 3.2 этот малый параметр был обозначен знаком вариации). Начальное состояние равновесия называют также докритическим. Деформации в этом состоянии определяются по линейным зависимостям

$$\mathbf{e}_{(0)} = \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{u}_{(0)} + (\nabla \otimes \mathbf{u}_0)^T]. \quad (3.4.7)$$

Напряжения $\mathbf{T}_{(0)}$ в докритическом состоянии вычисляются из деформаций $\mathbf{e}_{(0)}$ по закону Гука [34, 35]

$$\mathbf{T}_{(0)} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_{(0)}. \quad (3.4.8)$$

Деформации в начальном послекритическом состоянии $\mathbf{E}_{(b)}$ определяются в виде суммы линейных докритических деформаций (3.4.7) и нелинейных деформаций (3.3.20), обусловленных возмущенными перемещениями:

$$\mathbf{E}_{(b)} = \mathbf{e}_{(0)} + \alpha \mathbf{e} + \frac{1}{2} \alpha^2 [\mathbf{g} \otimes \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \otimes \boldsymbol{\omega}]. \quad (3.4.9)$$

Здесь $\mathbf{e}$ и $\boldsymbol{\omega}$ — соответственно линейный тензор деформаций и вектор поворота, обусловленные возмущенными перемещениями $\mathbf{u}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{2} [\nabla \otimes \mathbf{u} + (\nabla \otimes \mathbf{u})^T]; \\ \boldsymbol{\omega} &= \frac{1}{2} \text{rot } \mathbf{u}. \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Тензор напряжений в возмущенном состоянии $\mathbf{T}_{(b)}$ представляется разложением по малому параметру α аналогично деформациям (3.4.9):

$$\mathbf{T}_{(b)} = \mathbf{T}_{(0)} + \alpha \mathbf{T}_{(e)} + \alpha^2 \mathbf{T}_{(\omega)}. \quad (3.4.11)$$

Здесь $\mathbf{T}_{(0)}$ — напряжения в докритическом состоянии; $\mathbf{T}_{(e)}$ и $\mathbf{T}_{(\omega)}$ — напряжения, обусловленные возмущенными линейными деформациями $\mathbf{e}$ и поворотами ω соответственно.

Энергия деформаций в начальном послекритическом состоянии $U_{(b)}$ с учетом (3.4.9) и (3.4.11) представляется в виде

$$U_{(b)} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_{(b)} \cdot \cdot \mathbf{E}_{(b)} dV = U_{(0)} + \alpha U_{(1)} + \alpha^2 U_{(2)} + \dots \quad (3.4.12)$$

Здесь

$$U_{(0)} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_{(0)} \cdot \cdot \mathbf{e}_{(0)} dV; \quad (3.4.13)$$

$$U_{(1)} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_{(0)} \cdot \cdot \mathbf{e} dV. \quad (3.4.14)$$

В (3.4.12) квадратичный функционал $U_{(2)}$ от возмущенных перемещений можно представить в виде суммы двух функционалов:

$$U_{(2)} = U^*_{(2)} + U^{**}_{(2)}, \quad (3.4.15)$$

где

$$U^*_{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{T}_{(e)} \cdot \cdot \mathbf{e} dV; \quad (3.4.16)$$

$$U^{**}_{(2)} = \frac{1}{2} \int_V \{ \text{Sp}(\mathbf{T}_{(0)}) \omega \cdot \omega - \mathbf{T}_{(0)} \cdot \cdot \omega \otimes \omega \} dV. \quad (3.4.17)$$

Здесь $\text{Sp}(\mathbf{T}_{(0)})$ — след тензора напряжений в докритическом состоянии, который определяет первый инвариант этого тензора:

$$\begin{aligned} \text{Sp}(\mathbf{T}_{(0)}) &= \sigma_{(0)}^{ij} \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = \sigma_{(0)}^{ij} g_{ij} = \\ &= \sigma_{i(0)}^i = \sigma_{(11)}^{(0)} + \sigma_{(22)}^{(0)} + \sigma_{(33)}^{(0)}. \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

Функционал $U_{(0)}$ (3.4.13) определяет энергию докритических деформаций, следовательно, его вариация по послекритическим перемещениям $\delta \mathbf{u}$ равна нулю. Функционал $U_{(1)}$ (3.4.14) содержит лишь линейные члены послекритических перемещений, следовательно, по условию устойчивости (3.2.13) его вторая вариация

ция по возмущенным перемещениям равна нулю. Функционалы $U_{(2)}^*$ (3.4.16) и $U_{(2)}^{**}$ (3.4.17) содержат квадратичные члены от возмущенных перемещений, и их вариация приводит к уравнению устойчивости. При варьировании по δu функционала $U_{(2)}^{**}$ напряжения в докритическом состоянии $T_{(0)}$ выступают как константы. Поскольку докритическое состояние определяется по линейной теории, напряжения $T_{(0)}$ меняются пропорционально параметру нагружения λ :

$$T_{(0)} = \lambda T_{(0)}^*, \quad (3.4.19)$$

где $T_{(0)}^*$ — напряжения при заданной внешней нагрузке. Можно задавать одну внешнюю нагрузку единичной величины, а остальные нагрузки пропорционально ей согласно заданному соотношению нагрузок.

С учетом (3.4.19) условие устойчивости (3.2.13) приводит к уравнению

$$\delta^2 \Pi = \delta^2 U_{(2)} = \delta \left\{ \int_V T_{(e)} \cdot \cdot \delta e dV + \right. \\ \left. + \lambda \int_V [Sp(T_{(0)}^*) \omega \cdot \delta \omega - T_{(0)}^* \cdot \cdot \omega \otimes \delta \omega] dV \right\} = 0. \quad (3.4.20)$$

Наименьшее собственное значение этого уравнения определяет критический параметр нагрузки λ_* , при котором конструкция из начального устойчивого состояния равновесия переходит в смежное состояние равновесия.

Функционал (3.4.17) впервые был получен в работе [48]. Покажем, что из него как частные случаи могут быть получены известные функционалы для задач устойчивости стержня и прямоугольной пластины в декартовых координатах.

Для сжатого в направлении оси x силой P стержня докритические напряжения

$$\sigma_{(11)}^{(0)} = -\frac{P}{F}; \quad \sigma_{(22)}^{(0)} = \sigma_{(33)}^{(0)} = \sigma_{(12)}^{(0)} = \sigma_{(23)}^{(0)} = \sigma_{(13)}^{(0)} = 0.$$

Здесь F — площадь поперечного сечения стержня. Если стержень теряет устойчивость в плоскости xz , то перемещение (прогиб) в направлении оси z будет $w = w(x)$. Тогда согласно (3.3.25)

$$\omega_{(1)} = 0; \quad \omega_{(2)} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_{(3)} = 0.$$

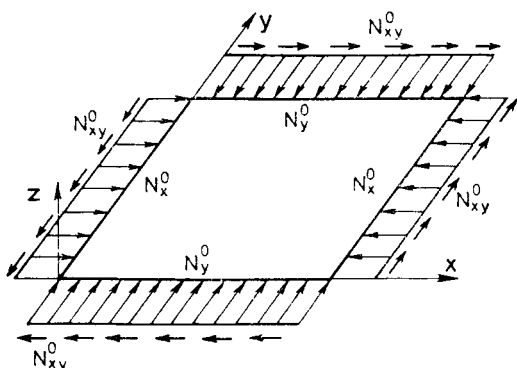


Рис. 3.3. Пластина, нагруженная мембранными силами

Функционал $U^{**}_{(2)}$ (3.4.17) для сжатого стержня принимает вид

$$\begin{aligned}
 U^{**}_{(2)} = & \frac{1}{2} \iiint_V \left(-\frac{P}{F} \{ \omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)} \} \begin{Bmatrix} \omega_{(1)} \\ \omega_{(2)} \\ \omega_{(3)} \end{Bmatrix} - \right. \\
 & \left. - \{ \omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)} \} \begin{bmatrix} -\frac{P}{F} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \omega_{(1)} \\ \omega_{(2)} \\ \omega_{(3)} \end{Bmatrix} \right) dx dy dz = \\
 & = -\frac{P}{2} \int \left(\frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (3.4.21)
 \end{aligned}$$

Для пластины (рис. 3.3), нагруженной усилиями сжатия

$$N_x^{(0)} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(11)}^{(0)} dz; \quad N_y^{(0)} = - \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(22)}^{(0)} dz$$

и усилием сдвига

$$N_{xy}^{(0)} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{(12)}^{(0)} dz,$$

безмоментные докритические напряжения

$$\sigma_{(11)}^{(0)} = -\frac{N_x^{(0)}}{h}; \quad \sigma_{(22)}^{(0)} = -\frac{N_y^{(0)}}{h}; \quad \sigma_{(12)}^{(0)} = \frac{N_{xy}^{(0)}}{h};$$

$$\sigma_{(33)}^{(0)} = \sigma_{(13)}^{(0)} = \sigma_{(23)}^{(0)} = 0.$$

В изгибаемой пластине прогиб является функцией двух координат $w = w(x, y)$. Согласно (3.3.25) компоненты вектора поворота определяются в виде

$$\omega_{(1)} = \frac{\partial w}{\partial y}; \quad \omega_{(2)} = -\frac{\partial w}{\partial x}; \quad \omega_{(3)} = 0.$$

Функционал $U^{**}_{(2)}$ (3.4.17) для нагруженной прямоугольной пластины принимает вид

$$U^{**}_{(2)} = \frac{1}{2} \int \int \int_V \left(-\frac{N_x^{(0)}}{h} - \frac{N_y^{(0)}}{h} \right) \{ \omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)} \} \times$$

$$\times \left\{ \begin{matrix} \omega_{(1)} \\ \omega_{(2)} \\ \omega_{(3)} \end{matrix} \right\} - \{ \omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)} \} \times$$

$$\times \begin{bmatrix} -\frac{N_x^{(0)}}{h} & \frac{N_{xy}^{(0)}}{h} & 0 \\ \frac{N_{xy}^{(0)}}{h} & -\frac{N_y^{(0)}}{h} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{matrix} \omega_{(1)} \\ \omega_{(2)} \\ \omega_{(3)} \end{matrix} \right\} dz dS =$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \left[-N_x^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - N_y^{(0)} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + 2N_{xy}^{(0)} \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right] dS.$$

(3.4.22)

Функционалы $U^{**}_{(2)}$, определяющие дополнительные слагаемые в энергии деформаций в момент потери устойчивости, для сжатого стержня (3.4.21) и для нагруженной прямоугольной пластины совпадают с известными функционалами [20, 26 и др.].

Для пластин и любых форм оболочек при любых нагрузках, вызывающих потерю устойчивости конструкции, из общего функционала (3.4.17) могут быть получены частные случаи. В матричной записи для оболочки функционал (3.4.17) принимает вид

$$U^{**}_{(2)} = \frac{1}{2} \int \int_S (W_0 \omega^T \omega - \omega^T V_0 \omega) dS. \quad (3.4.23)$$

Здесь $\omega^T = \{\omega_{(1)}, \omega_{(2)}, \omega_{(3)}\}$ и введены следующие обозначения:

$$W_0 = \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_{(11)}^{(0)} + \sigma_{(22)}^{(0)} + \sigma_{(33)}^{(0)}) dx_3 = N_{(11)}^{(0)} + N_{(22)}^{(0)} + N_{(33)}^{(0)} ; \quad (3.4.24)$$

$$\begin{aligned} V_0 &= \int_{-h/2}^{h/2} \begin{bmatrix} \sigma_{(11)}^{(0)} & \sigma_{(12)}^{(0)} & \sigma_{(13)}^{(0)} \\ \sigma_{(21)}^{(0)} & \sigma_{(22)}^{(0)} & \sigma_{(23)}^{(0)} \\ \sigma_{(31)}^{(0)} & \sigma_{(32)}^{(0)} & \sigma_{(33)}^{(0)} \end{bmatrix} dx_3 = \\ &= \begin{bmatrix} N_{(11)}^{(0)} & N_{(12)}^{(0)} & Q_{(1)}^{(0)} \\ N_{(21)}^{(0)} & N_{(22)}^{(0)} & Q_{(2)}^{(0)} \\ Q_{(1)}^{(0)} & Q_{(2)}^{(0)} & N_{(33)}^{(0)} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.4.25)$$

Соотношения (3.4.23) будут использованы в главах 4—6 при решении линеаризованных задач устойчивости.

АППРОКСИМАЦИЯ ОДНОМЕРНЫМИ КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

4.1. ВВЕДЕНИЕ

При решении задач деформирования оболочек вращения аппроксимацию геометрии оболочки и полей перемещений можно проводить одномерными конечными элементами, так как при осесимметричных нагрузках искомые функции зависят от одной (меридиональной) координаты. Задачи неосесимметричных колебаний, задачи потери устойчивости оболочки вращения при осесимметричной нагрузке, а также задачи деформирования оболочек вращения при неосесимметричной нагрузке также можно решать с помощью одномерных конечных элементов. Для этого внешние нагрузки и искомые перемещения сначала разлагаются в ряд Фурье по окружной координате. Далее для коэффициентов ряда Фурье проводится конечноэлементная аппроксимация по меридиональной координате. Таким же образом решаются задачи деформирования круглых пластин. Анализ задач деформирования оболочек вращения на основе одномерных конечных элементов значительно сокращает объем вычислений, время и стоимость решения. Возможна также стыковка одномерных оболочечных элементов с двумерными, которыми необходимо пользоваться в местах локального возмущения напряженно-деформированного состояния. Для этого разрабатываются специальные переходные конечные элементы [102]. При применении одномерных кольцевых конечных элементов не возникает трудностей с выполнением главных граничных условий, так как соседние элементы стыкуются только в одной узловой точке, точнее по одной кольцевой линии, где искомые функции постоянны. Поэтому нет затруднений в применении соотношений классической теории оболочек при аппроксимации одномерными конечными элементами. В этом случае выбором в качестве узловых неизвестных прогиба и его первой производной автоматически удовлетворяются главные граничные условия в местах стыковки конечных элементов. В этом смысле у теории оболочек типа Тимошенко нет преимущества перед классической теорией при построении одномерных конечных элементов. Однако в теории оболочек типа Тимошенко учитываются

деформации поперечных сдвигов, что важно при расчете толсто-стенных и анизотропных оболочек. Поэтому и одномерные конечные элементы будем строить на основе теории оболочек типа Тимошенко.

Различные одномерные кольцевые конечные элементы нашли широкое применение в практике расчета оболочек вращения. В основном построение конечных элементов проводилось на базе соотношений классической теории оболочек. Рассматривались кольцевые цилиндрические, конические, искривленные и изопараметрические конечные элементы [5, 41, 46, 47, 51, 75, 94, 150, 162 и др.]. Осесимметричный конечный элемент с учетом деформаций поперечного сдвига предложен в работе [174]. Упомянутые конечные элементы применялись для решения задач определения напряженно-деформированного состояния, устойчивости и колебаний гладких и разветвленных оболочек вращения, а также для расчета оболочки с кольцевой системой ребер [150, 162].

В настоящей главе на основе соотношений теории оболочек типа Тимошенко получены матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости универсального изопараметрического конечного элемента оболочки вращения. На примерах расчета изгиба, устойчивости и колебаний оболочек различных форм проведен анализ эффективности рассматриваемого конечного элемента. Рассмотрены вопросы расчета оболочек вращения с кольцевой системой ребер. На основе сдвиговой модели Тимошенко построены стержневые и балочные конечные элементы, которые применены для решения задач изгиба, устойчивости, колебаний и нестационарной динамики.

4.2. ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ОБОЛОЧКИ ВРАЩЕНИЯ

При решении задач деформирования оболочек вращения их можно разбить на кольцевые осесимметричные конечные элементы (рис. 4.1). Чтобы конечный элемент мог применяться для расчета оболочек вращения любых форм, он должен быть изопараметрическим с возможностью изменения геометрии. Геометрия оболочки в цилиндрической системе координат r, φ, z задается с помощью функции кривой меридиана оболочки

$$r = r(z). \quad (4.2.1)$$

При решении задач деформирования разветвленных оболочек конечные элементы для различных частей оболочки могут быть определены в различных координатных системах. Поэтому необходимо выделить следующие уровни координатных систем:

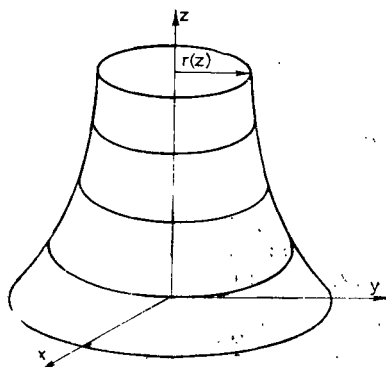


Рис. 4.1. Разбивка оболочки вращения на конечные элементы

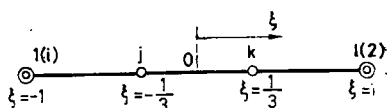


Рис. 4.2. Координатная система в базовом элементе

1) глобальные декартова или цилиндрическая системы координат, в которых объединяются конечные элементы различных ансамблей и составляется матрица жесткости всей конструкции;

2) системы криволинейных координат второго уровня, в которых выводятся матрицы жесткости конечных элементов одного ансамбля;

3) локальные системы координат, в которых определяются аппроксимирующие функции и проводится численное интегрирование.

В системах координат второго уровня записываются кинематические соотношения, уравнения состояния и выводится матрица жесткости отдельного конечного элемента. В качестве координатных систем второго уровня в зависимости от формы оболочки можно использовать поверхностные координаты $x^1=s$; $x^2=\varphi$ (см. рис. П1.3), сферические координаты $x^1=\alpha$; $x^2=\varphi$ (см. рис. П1.4), полярные координаты $x^1=\rho$; $x^2=\varphi$ и др. Здесь для вывода основных соотношений используются координаты поверхности s ; φ , хотя вывод аналогичен и для других координатных систем.

В качестве локальных координат используются нормализованные координаты. В базовом конечном элементе (кольцевом цилиндрическом) нормализованные координаты между узлами 1 и 2 меняются в пределах $-1 \leq \xi \leq 1$. При этом в узле 1 $\xi = -1$, в узле 2 $\xi = +1$ (рис. 4.2). Функция Φ , которая определена в базовом элементе, может быть аппроксимирована кубическим полиномом

$$\Phi = \alpha_0 + \alpha_1 \xi + \alpha_2 \xi^2 + \alpha_3 \xi^3, \quad (4.2.2)$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ — коэффициенты, которые выражаются через значения функции Φ и ее производных в определенных точках

базового элемента. Например, могут быть выбраны значения функции $\Phi(\xi)$ и ее производной $\Phi'(\xi)$ в узлах 1 и 2:

$$\Phi(-1) = \Phi_1; \quad \Phi(1) = \Phi_2;$$

$$\left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=-1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_1; \quad \left. \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right|_{\xi=1} = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_2. \quad (4.2.3)$$

Подставляя (4.2.3) в аппроксимацию (4.2.2), получаем систему уравнений для определения коэффициентов α_i через значения функции и ее производной в узлах. Тогда аппроксимация (4.2.2) принимает вид

$$\Phi(\xi) = \Phi_1 N_1 + \Phi_2 N_2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_1 N^*_1 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_2 N^*_2,$$

или, сокращенно,

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \Phi_i N_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right)_i N^*_i \right\}. \quad (4.2.4)$$

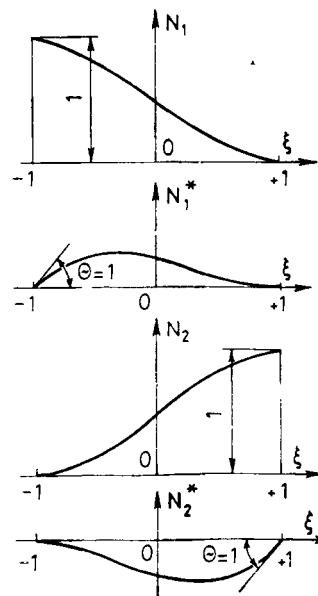
Здесь $N_i(\xi)$, $N^*_i(\xi)$ — эрмитовы полиномы третьего порядка:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1-\xi)^2(2+\xi);$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1+\xi)^2(2-\xi);$$

$$N^*_1 = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi^2-1);$$

$$N^*_2 = \frac{1}{4}(\xi-1)(\xi+1)^2. \quad (4.2.5)$$



Эти аппроксимирующие функции называются также функциями формы конечного элемента. Их графики показаны на рис. 4.3.

Для определения постоянных α_i в аппроксимации (4.2.2) могут быть выбраны также значения функции в узлах i, j, k, l , где $\xi_i = -1$; $\xi_j = -1/3$; $\xi_k = +1/3$; $\xi_l = 1$ (см. рис. 4.2). Тогда

Рис. 4.3. Функции формы одномерного конечного элемента

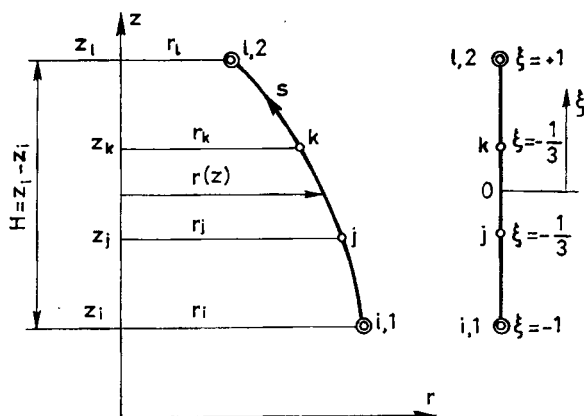


Рис. 4.4. Искривленный конечный элемент оболочки вращения

аппроксимация (4.2.2) может быть выражена через значения функции в этих узлах:

$$\Phi(\xi) = \Phi_i R_i + \Phi_j R_j + \Phi_k R_k + \Phi_l R_l, \quad (4.2.6)$$

где R_i, R_j, R_k, R_l — кубические функции формы четырехузлов-ного конечного элемента:

$$\begin{aligned} R_i &= -\frac{9}{16}(\xi-1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right); \\ R_j &= \frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-1) \left(\xi - \frac{1}{3} \right); \\ R_k &= -\frac{27}{16}(\xi+1)(\xi-1) \left(\xi + \frac{1}{3} \right); \\ R_l &= \frac{9}{16} \left(\xi + \frac{1}{3} \right) \left(\xi - \frac{1}{3} \right) (\xi+1). \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

Рассмотрим произвольный искривленный конечный элемент оболочки вращения (рис. 4.4). Для заданной функции $r(z)$ связь между функцией z и координатой ξ принимаем в виде кубической зависимости (4.2.6):

$$z(\xi) = z_i R_i + z_j R_j + z_k R_k + z_l R_l. \quad (4.2.8)$$

Здесь z_i, z_j, z_k, z_l — координата z в узлах i, j, k, l .

Функция $r(z)$ может быть задана также численно с помощью значений радиусов r_i в определенных точках. Для вычисления значений функции $r(z)$ и ее производных в промежуточных

точках используется сплайн-аппроксимация с помощью естественного сплайна [4], для которого нет необходимости задавать производные на концах интервала, а можно задать только значения функции в узлах. Таким же образом можно задать связь между координатами r и ξ :

$$r(\xi) = r_i R_i + r_j R_j + r_k R_k + r_l R_l. \quad (4.2.9)$$

Здесь r_i, r_j, r_k, r_l — радиусы в узлах i, j, k, l .

4.2.1. Матрица жесткости

Для вывода матрицы жесткости конечного элемента воспользуемся функционалом (1.5.9). Деформации ϵ в этом функционале определены зависимостями (1.3.27):

$$\epsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}. \quad (4.2.10)$$

Здесь $\mathbf{u}^T = \{u, v, w, \gamma_s, \gamma_\varphi, \gamma\}$ — перемещения в координатной системе $x^1 = s$; $x^2 = \varphi$; x_3 оболочки вращения (см. приложение 1). В (4.2.10) матрица $\mathbf{L}$ содержит операторы дифференцирования, вид которых устанавливают кинематические соотношения (1.3.17).

Для перемещений $\mathbf{u}$ производим разделение переменных в следующем виде:

$$\begin{aligned} u &= u_0(s) \cos n\varphi; \\ v &= v_0(s) \sin n\varphi; \\ w &= w_0(s) \cos n\varphi; \\ \gamma_s &= \gamma_s^0(s) \cos n\varphi; \\ \gamma_\varphi &= \gamma_\varphi^0(s) \sin n\varphi; \\ \gamma &= \gamma_0(s) \cos n\varphi. \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

В матричном виде это разложение записывается следующим образом:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_* \mathbf{u}_0, \quad (4.2.12)$$

где

$$\mathbf{H}_* = \begin{bmatrix} \cos n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sin n\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos n\varphi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos n\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sin n\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cos n\varphi \end{bmatrix}$$

В качестве неизвестных в узлах выбираем значения перемещений и их первой производной по глобальной координате s . Связь между производными функции Φ в локальных и глобальных координатах определяет зависимость

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{\partial \Phi}{\partial s} J, \quad (4.2.13)$$

где $J = \frac{\partial s}{\partial \xi}$ — якобиан преобразования координат. С использованием зависимостей (П1.25) якобиан J вычисляется в виде

$$J = \frac{\partial s}{\partial \xi} = \frac{\partial s}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial \xi} = \frac{\partial z}{\partial \xi} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial r}{\partial z} \right)^2}. \quad (4.2.14)$$

Здесь производная $\frac{\partial r}{\partial z}$ вычисляется из заданной функции $r(z)$ (4.2.1), а производная $\frac{\partial z}{\partial \xi}$ — из (4.2.8). С учетом (4.2.13) аппроксимация (4.2.4) принимает вид

$$\Phi(\xi) = \sum_{i=1}^2 \left\{ \Phi_i N_i + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial s} \right)_i N^*_i J_i \right\}, \quad (4.2.15)$$

где J_i ($i=1, 2$) — значение якобиана преобразования координат в узлах 1 и 2.

Для всех функций u_0 в (4.2.12) проводим одинаковые аппроксимации согласно соотношениям (4.2.15), которые в матричной записи имеют вид

$$u_0 = N(\xi) d_e. \quad (4.2.16)$$

Здесь d_e — вектор узловых перемещений конечного элемента:

$$d_e = \left\{ d_1^e \right\}. \quad (4.2.17)$$

Здесь d_i^e — перемещения i -го узла:

$$d_i^e = \left\{ u_i^0, \left(\frac{\partial u_0}{\partial s} \right)_i, v_i^0, \left(\frac{\partial v_0}{\partial s} \right)_i, w_i^0, \left(\frac{\partial w_0}{\partial s} \right)_i, \gamma_{si}^0, \left(\frac{\partial \gamma_s^0}{\partial s} \right)_i, \gamma_{\Phi i}^0, \left(\frac{\partial \gamma_{\Phi}^0}{\partial s} \right)_i, \gamma_i^0, \left(\frac{\partial \gamma_0}{\partial s} \right)_i \right\}. \quad (4.2.18)$$

Матрица $N(\xi)$ в (4.2.16) содержит функции формы конечного элемента и значения якобиана J_i в узлах конечного элемента.

Подставляя аппроксимацию перемещений по меридиану (4.2.16) в разложение (4.2.12), получаем

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}_* \mathbf{N} \mathbf{d}_e = \tilde{\mathbf{N}} \mathbf{d}_e, \quad (4.2.19)$$

где

$$\tilde{\mathbf{N}} = \mathbf{H}_* \mathbf{N}.$$

Подставляя (4.2.19) в (4.2.10), получаем кинематические соотношения для конечного элемента

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{d}_e, \quad (4.2.20)$$

где $\mathbf{B}$ — матрица связи деформаций с узловыми перемещениями:

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{H}_* (\varphi) \mathbf{N} (\xi).$$

Подставляя соотношения (4.2.20) в функционал (1.5.9), получаем энергию деформации конечного элемента, выраженного через узловые перемещения:

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad (4.2.21)$$

где $\mathbf{K}_e$ — матрица жесткости конечного элемента:

$$\mathbf{K}_e = \iint_{S_e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dS. \quad (4.2.22)$$

Для оболочки вращения элемент площади выражается в виде

$$dS = r d\varphi ds = r[z(\xi)] J(\xi) d\xi d\varphi. \quad (4.2.23)$$

Здесь при преобразовании использованы зависимости (4.2.13). В формуле (4.2.23) $r(z)$ вычисляется по (4.2.1), $z(\xi)$ — по соотношению (4.2.8), а $J(\xi)$ — по зависимости (4.2.14). С учетом (4.2.23) матрица жесткости (4.2.22) конечного элемента вычисляется по формуле

$$\mathbf{K}_e = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} r(\xi) J(\xi) d\xi d\varphi. \quad (4.2.24)$$

Интеграл по окружной координате можно вычислить аналитически, так как матрица $\mathbf{B}$ содержит тригонометрические функции. Матрицу $\mathbf{B}$ в соотношении (4.2.20) можно представить в виде

$$\mathbf{B} = \mathbf{T}(\varphi) \mathbf{b}(\xi), \quad (4.2.25)$$

где матрица $T(\varphi)$ содержит лишь тригонометрические функции. После интегрирования в (4.2.24) по координате φ получаем

$$K_e = \begin{cases} \pi A & \text{при } n \neq 0; \\ 2\pi A & \text{при } n = 0. \end{cases} \quad (4.2.26)$$

Здесь матрица A определяется интегрированием по координате ξ :

$$A = \int_{-1}^1 b^T D b r(\xi) J(\xi) d\xi. \quad (4.2.27)$$

Необходимо учитывать, что при осесимметричном деформировании ($n=0$) матрица A будет иметь размер 16×16 , так как в каждом из двух узлов конечного элемента четыре узловых перемещения $(v_i^0, \left(\frac{\partial v_0}{\partial s}\right)_i, \gamma_{\varphi 0}^i, \left(\frac{\partial \gamma_{\varphi 0}^0}{\partial s}\right)_i)$ равны нулю. В этом случае соответствующие строки и столбцы матрицы жесткости содержат только нули и их следует вычеркивать. Матрицу A в (4.2.27) для простейших форм оболочек, например цилиндрических, можно определить аналитическим интегрированием. Для искривленных конечных элементов матрицу A можно вычислить только численным интегрированием. На практике для любых форм конечных элементов матрица A определяется только численным интегрированием по схеме Гаусса. Рекомендации по выбору порядка схемы интегрирования даны в приложении 4.

4.2.2. Матрица масс

Матрицу масс конечного элемента, необходимую при решении задач динамики, получаем из функционала кинетической энергии оболочки (1.7.6):

$$T = \frac{1}{2} \int_S \dot{u}^T R u dS. \quad (4.2.28)$$

Подставляя аппроксимацию (4.2.19) в этот функционал, получаем выражение для кинетической энергии конечного элемента через скорости узловых перемещений:

$$T = \frac{1}{2} \dot{d} e^T M_e \dot{d}_e. \quad (4.2.29)$$

Здесь M_e — согласованная с полем перемещений матрица масс конечного элемента:

$$M_e = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 N^T H_*^T R H_* N r(\xi) J(\xi) d\xi d\varphi. \quad (4.2.30)$$

В случае однородной по толщине оболочки со слоями одинаковой плотности ρ матрица R (1.7.7) принимает вид

$$R = \rho h \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} I \end{bmatrix}$$

Здесь I — единичная матрица размером 3×3 . Матрицу масс согласно формуле (4.2.30) также можно аналитически проинтегрировать по окружной координате φ . По координате ξ матрица масс интегрируется численно по схеме Гаусса.

4.2.3. Матрица геометрической жесткости

Матрицу геометрической жесткости получаем из функционала $U^{**}_{(2)}$ (3.4.23):

$$U^{**}_{(2)} = \frac{1}{2} \int \int_{S_e} (W_0 \omega^T \omega - \omega^T V_0 \omega) dS. \quad (4.2.31)$$

Здесь согласно (3.3.25) и (П1.27) вектор поворота для оболочек вращения в координатах s, φ выражается через перемещения по зависимостям

$$\omega = \Phi u. \quad (4.2.32)$$

Здесь Φ — матрица операторов дифференцирования:

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial}{\partial s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Подставляя аппроксимацию (4.2.19) в (4.2.32), получаем выражение для определения поворотов через узловые перемещения:

$$\omega = \Phi d_e. \quad (4.2.33)$$

Здесь Φ — матрица связи поворотов и узловых перемещений:

$$\Phi = \varphi H(\varphi) N(\xi). \quad (4.2.34)$$

Подставляя (4.2.33) в функционал (4.2.31), получаем квадратичную форму

$$U^{**}_{(2)} = \frac{1}{2} d_e^T G_e d_e,$$

где G_e — матрица геометрической жесткости конечного элемента:

$$G_e = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 (W_0 \Phi^T \Phi - \Phi^T V_0 \Phi) r(\xi) J(\xi) d\xi d\varphi. \quad (4.2.35)$$

4.2.4. Эквивалентные узловые силы

Функционал работы внешних сил (1.6.6) в матричной записи имеет вид ($q_{(2)} = q_{\varphi} = 0$)

$$W_q^e = \iint_{S_e} u^T q dS. \quad (4.2.36)$$

Здесь $q^T = \{q_s, 0, q, 0, 0, 0\}$ — вектор внешних распределенных сил. Подставляя в (4.2.36) аппроксимацию (4.2.19), получаем

$$W_q^e = d_e^T F_q^e, \quad (4.2.37)$$

где F_q^e — вектор эквивалентных узловых сил от распределенной нагрузки:

$$F_q^e = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 N^T(\xi) H_*^T(\varphi) q(\xi) r(\xi) J(\xi) d\xi d\varphi. \quad (4.2.38)$$

В качестве примера по формуле (4.2.38) вычислим эквивалентные узловые силы для цилиндрического конечного элемента длиной $2l$ и радиусом R при действии на него равномерного внешнего давления $q = -q$. В этом случае $q_{(1)} = q_{(2)} = 0$; $q = -q$; $r = R$; $J = l$ и в матрице H_* в (4.2.12) $n = 0$, так как при равномерном внешнем давлении в докритическом состоянии возможно только осесимметричное деформирование оболочки. После интегрирования выражения (4.2.38) получаем

$$F_q^{eT} = -2\pi R l q \{0, 0, 0, 0, 1, l/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, -l/3, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Аналогично получаем эквивалентные узловые силы от внешней контурной нагрузки. Для этого используется функционал работы контурных сил (1.6.26). Для оболочки вращения в координатах s ; φ этот функционал принимает вид (при осесимметричной нагрузке $N_{s\varphi}^* = M_{s\varphi}^* = 0$)

$$W_c^e = \int_0^{2\pi} (N_{ss}^* u + N_{s\varphi}^* v + Q_s^* w + M_{ss}^* \gamma_s + M_{s\varphi}^* \gamma_{\varphi}) r d\varphi. \quad (4.2.39)$$

Рассматриваемый одномерный конечный элемент можно применять в расчетах лишь в случае, когда все внешние нагрузки являются осесимметричными или когда они разложены в ряды Фурье по окружной координате. При осесимметричных нагрузках заданные силы N_{ss}^* , Q_s^* , M_{ss}^* не зависят от окружной координаты и соответствующие эквивалентные узловые силы определяются умножением заданных граничных сил на длину

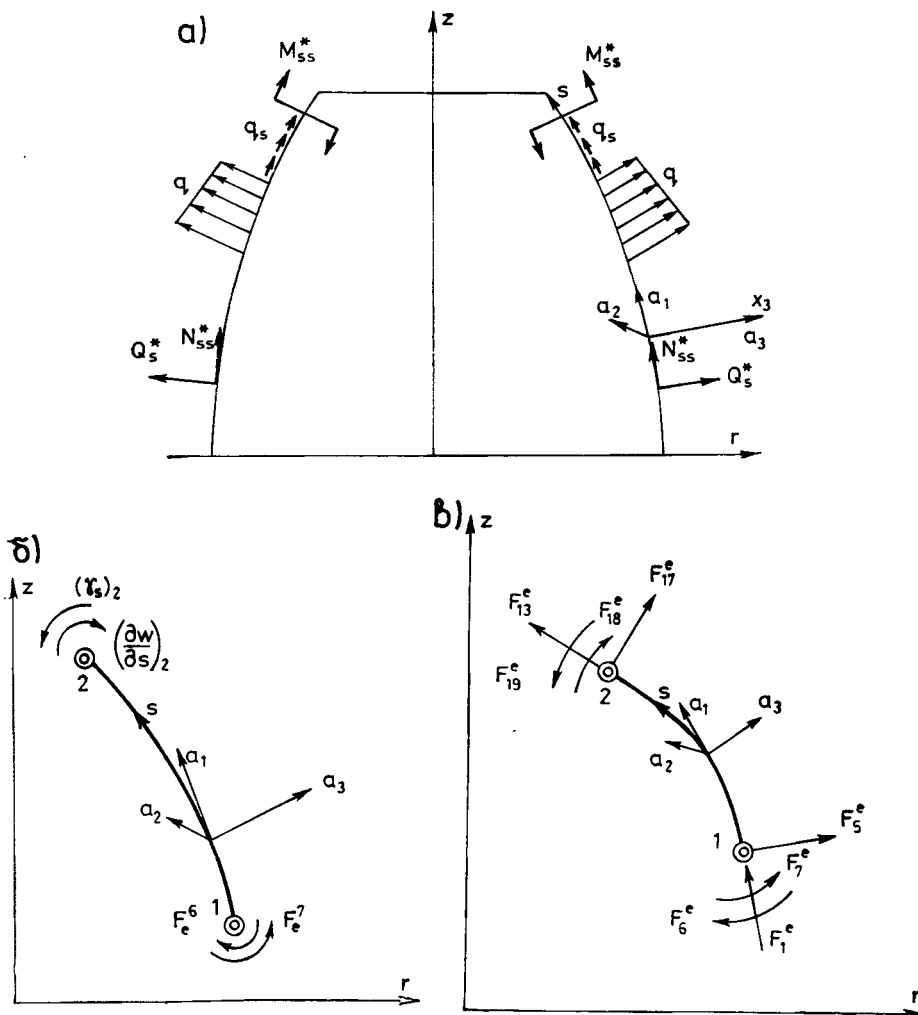


Рис. 4.5. Положительные направления внешних внеузловых (а) и узловых (б, в) сил

окружности $2\pi r$. Кроме того, антисимметричные силы принимаются равными нулю ($N_{\varphi}^* = M_{\varphi}^* = 0$). В этом случае работа внешних узловых сил на узловые перемещения на контуре оболочки согласно (4.2.39)

$$W_c^e = \mathbf{d}_i^{eT} \mathbf{F}_c^e, \quad i = 1, 2, \quad (4.2.40)$$

где

$$\mathbf{F}_c^{eT} = 2\pi r \{N_{ss}^*, 0, 0, 0, Q_s^*, 0, M_{ss}^*, 0, 0, 0, 0, 0\}.$$

Эти контурные силы совместно с эквивалентными силами от распределенной нагрузки определяют силы в граничных узлах.

Внешние распределенные по линиям окружности силы и моменты после умножения на $2\pi r$ прибавляются в ближайшем узле к эквивалентным узловым силам. Положительные направления внешних узловых и внеузловых сил показаны на рис. 4.5. Пояснения различия знаков моментов от распределенной нагрузки (F_6^e, F_{18}^e) и знаков моментов (F_7^e, F_{19}^e), которые вычисляются из заданных моментов (M_{ss}^*), даны в параграфе 4.6 для случая круглой пластины.

В итоге работу внешних сил на конечный элемент можно представить в виде

$$W^e = \mathbf{d}_e^{eT} \mathbf{F}_e, \quad (4.2.41)$$

где $\mathbf{F}_e$ — суммарные внешние узловые силы на конечный элемент.

Обозначаем рассмотренный конечный элемент через $CAU3W24$ (CAU — оболочка; 3 — аппроксимация всех величин полиномом третьего порядка; W — варьирование перемещений, т. е. использован принцип минимума потенциальной энергии; 24 — число степеней свободы конечного элемента).

При осесимметричном деформировании используется редуцированный вариант этого конечного элемента $CAU3W16$. Иногда для расчета гладких оболочек принимается $\gamma = 0$ (пятимодальная теория оболочек), и тогда конечный элемент при неосесимметричном деформировании будет иметь 20 степеней свободы ($CAU3W20$), а при осесимметричном деформировании — 12 степеней свободы ($CAU3W12$). Рассматриваемый конечный элемент был предложен в работе [22] и позднее подробно описан в работе [148].

4.2.5. Геометрия разветвленной оболочки

В практических расчетах часто приходится решать задачи деформирования оболочек вращения с разветвленным меридианом (рис. 4.6). В этом случае для каждого участка оболочки:

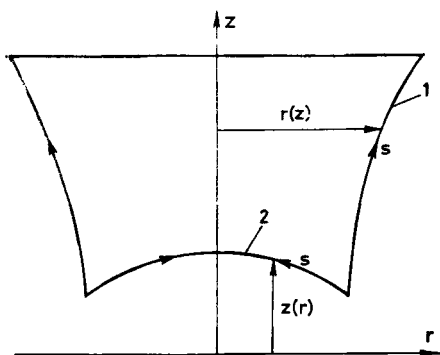


Рис. 4.6. Координаты и геометрия разветвленной оболочки

используется своя система координат поверхности s, φ, x_3 . Эти координаты образуют левую систему криволинейных нормальных координат (рис. 4.7). Глобальная цилиндрическая система r, φ, z образует правую систему координат. Координата φ для обеих систем координат является общей. Таким образом, трансформацию от координат s, x_3 к координатам r, z определяет угол θ , который образуется совмещением по часовой стрелке орта i_3 координаты z (по оси вращения) с ортом a_1 координаты по меридиану s (см. рис. 4.7). Однако в связи с применением изопараметрической техники аппроксимация геометрии оболочки на различных участках может различаться. Аппроксимация $r=r(z)$ (4.2.1) применяется для участков, у которых угол θ находится в пределах $-45^\circ \leq \theta \leq 45^\circ$ и $135^\circ \leq \theta \leq 225^\circ$. Например, участок 1 на рис. 4.6 аппроксимируется функцией $r(z)$. Если угол θ находится в пределах $45^\circ < \theta < 135^\circ$ и $225^\circ < \theta < 315^\circ$, то меридиан задается с помощью функции

$$z=z(r). \quad (4.2.42)$$

Участок 2 на рис. 4.6 удобнее задавать функцией $z=z(r)$. Для численно заданной функции меридиана с M участками имеем $M+1$ узлов сплайна. При этом задается либо $M+1$ значений радиусов параллели $r_1, r_2, \dots, r_{M+1}$ (рис. 4.8, а), либо $M+1$ значений координат $z_1, z_2, \dots, z_{M+1}$ (рис. 4.8, б). Для случая, когда участок оболочки задан функцией $r(z)$, геометрические преобразования изопараметрической техники изложены в параграфе 4.2, а главные радиусы кривизны вычисляются по формулам (П1.33). Тригонометрические функции от угла θ согласно (П1.25) вычисляются по формулам

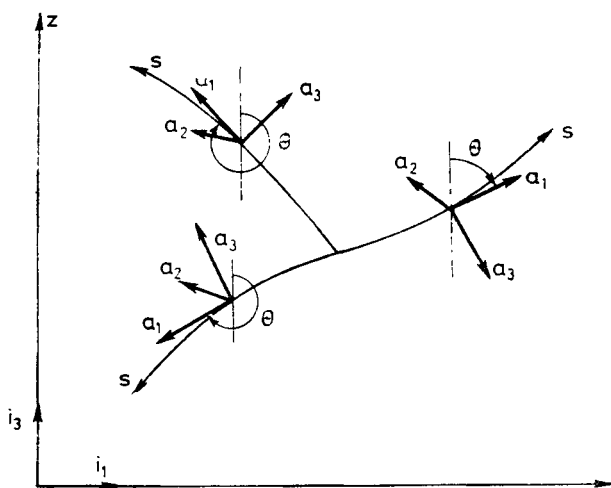


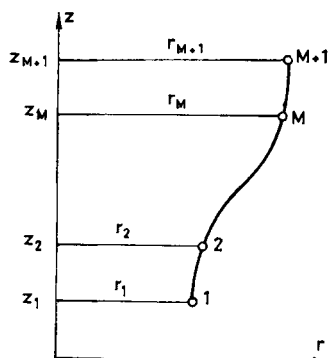
Рис. 4.7. Определение угла трансформации координатных систем поверхности к глобальным координатам

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta &= \frac{dr}{dz}; \quad \sin \theta = \frac{\frac{dr}{dz}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}; \\ \cos \theta &= \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.43)$$

Для случая, когда участок оболочки задается функцией $z(r)$, тригонометрические функции от угла θ вычисляются по формулам

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \theta &= \frac{dz}{dr}; \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}}; \\ \cos \theta &= \frac{\frac{dz}{dr}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}}. \end{aligned} \quad (4.2.44)$$

а)



б)

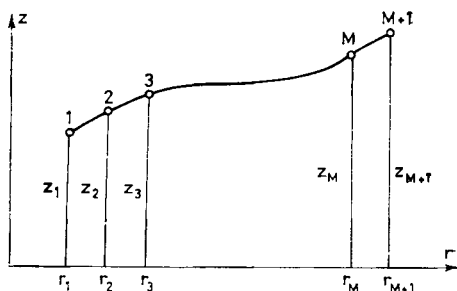


Рис. 4.8. Аппроксимация меридиана оболочки вращения кубическими сплайнами: $r=r(z)$ (а) и $z=z(r)$ (б)

Кривизны оболочки для этих участков вычисляются по формулам

$$k_1 = \frac{d\theta}{ds} = -\frac{1}{R_1} = -\frac{\frac{d^2z}{dr^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2\right]^{3/2}};$$

$$k_2 = -\frac{1}{R_2} = -\frac{\cos \theta}{r} = -\frac{\frac{dz}{dr}}{r \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}}. \quad (4.2.45)$$

При этом производные $\frac{dz}{dr}$ и $\frac{d^2z}{dr^2}$ в формулах (4.2.44) и (4.2.45) вычисляются по функции $z(r)$ (4.2.42), а радиусы параллели определяет аппроксимация (4.2.9). Для участков оболочки, где задана функция $r(z)$, якобиан преобразования координат ($s \rightarrow \xi$) вычисляется по формуле (4.2.14). Для участков, где задана функция $z(r)$, якобиан преобразования координат ($s \rightarrow \xi$) вычисляется по формуле

$$J = \frac{ds}{d\xi} = \frac{ds}{dr} \frac{dr}{d\xi} = \frac{dr}{d\xi} \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2}. \quad (4.2.46)$$

Здесь $dr/d\xi$ вычисляется по аппроксимации (4.2.9), а dz/dr — по функции (4.2.42).

Изопараметрическое преобразование для участка оболочки, где задана функция $z(r)$, показано на рис. 4.9. При автомати-

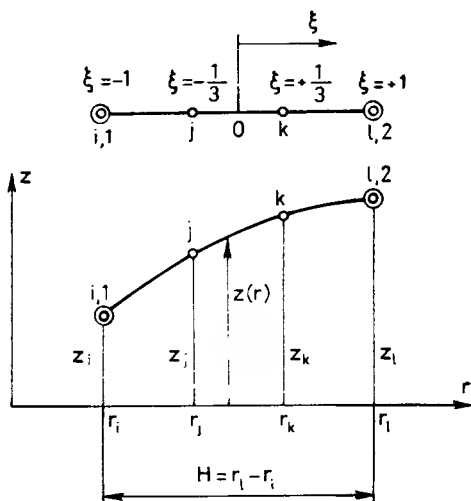


Рис. 4.9. Изопараметрическое преобразование для участка с заданной функцией $z=z(r)$

ческой разбивке оболочки на конечные элементы определяется ширина $H=r_l-r_i$ (или высота $H=z_l-z_i$) конечного элемента. Удобно принять, что промежуточные узлы конечного элемента для задания геометрии по координате r (или z) располагаются равномерно:

$$r_i; r_j=r_i+\frac{1}{3}H; r_k=r_i+\frac{2}{3}H; r_l=r_i+H. \quad (4.2.47)$$

С учетом (4.2.9) и (4.2.7) определяются производные в узлах 1 и 2:

$$\frac{dr}{d\xi}(\xi=-1)=\frac{H}{2}; \quad \frac{dr}{d\xi}(\xi=1)=\frac{H}{2}. \quad (4.2.48)$$

Такие же значения при равномерном расположении внутренних узлов имеют производные $dz/d\xi$. Подставляя (4.2.48) в формулу (4.2.46), получаем значения якобиана преобразования координат в узлах 1 и 2:

$$J_1(\xi=-1)=\frac{H}{2} \sqrt{1+\left[\left(\frac{dz}{dr}\right)_1\right]^2};$$

$$J_2(\xi=1)=\frac{H}{2} \sqrt{1+\left[\left(\frac{dz}{dr}\right)_2\right]^2}. \quad (4.2.49)$$

На основе соотношений (4.2.14) и (4.2.46) можно вычислить значение якобиана в любой точке ξ конечного элемента, в частности в точках численного интегрирования.

4.3. ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

При решении задач изгиба оболочек методом конечных элементов на базе принципа минимума потенциальной энергии за основу принимается потенциальная энергия конечного элемента, которая определяется разностью энергии деформации U^e (4.2.21) и работы внешних сил W^e (4.2.41):

$$\begin{aligned} \Pi^e &= U^e - W^e = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e. \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

Из принципа минимума потенциальной энергии определяется условие равновесия одного конечного элемента

$$\frac{\partial \Pi^e}{\partial \mathbf{d}_e^T} = \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e - \mathbf{F}_e = 0. \quad (4.3.2)$$

Вся оболочка разбита на множество конечных элементов, и потенциальная энергия Π для всей конструкции определяется суммой энергии отдельных конечных элементов:

$$\begin{aligned} \Pi &= \sum_e \Pi^e = \sum_e U^e - \sum_e W^e = U - W = \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{d}^T \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{F}. \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

Здесь $\mathbf{d}$ — узловые перемещения для всей конструкции; $\mathbf{F}$ — узловые силы для всей конструкции; $\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}_e$ — матрица жесткости всей оболочки, которая определяется суммированием матриц жесткостей отдельных конечных элементов. Принцип минимума потенциальной энергии, примененный для всей конструкции, приводит к уравнению равновесия всей оболочки

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}^T} = \mathbf{K} \mathbf{d} - \mathbf{F} = 0. \quad (4.3.4)$$

Матрица $\mathbf{K}$ уравнения (4.3.4) имеет ленточный вид и является симметричной, так как матрица $\mathbf{K}_e$ и матрица $\mathbf{D}$ в (4.2.22) симметричны. Например, при расчете гладких оболочек для конечного элемента CAU3W24 полуширина ленты матрицы жесткости равна 24.

Решением системы уравнений (4.3.4) определяются перемещения в узлах

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}. \quad (4.3.5)$$

Далее из узловых перемещений по формулам (4.2.20) вычисляются деформации ϵ в каждом конечном элементе, а из деформаций по физическим соотношениям (1.5.8) — матрица усилий σ , которая содержит мембранные усилия $N_{(\alpha\beta)}$, моменты $M_{(\alpha\beta)}$, поперечные силы $Q_{(\alpha)}$ и усилие обжатия нормали N_{33} . Из этих интегральных усилий определяются напряжения. Для однородной по толщине оболочки напряжения вычисляются по формулам (1.11.2), (1.11.3) и (1.11.14). Для слоистых оболочек напряжения вычисляются по алгоритму, изложенному в параграфе 1.11.

Отметим, что полученные усилия, моменты и поперечные силы неразрывны при переходе от элемента к элементу, так как они определяются только через первые производные от перемещений. Поскольку первые производные от перемещений для конечного элемента CAU3W24 являются узловыми неизвестными, то автоматически удовлетворяется неразрывность на межэлементных границах всех внутренних сил.

4.3.1. Изгиб цилиндрической оболочки под действием распределенной по линии окружности нагрузки

Для исследования свойств конечного элемента CAU3W24 и анализа сходимости решения рассмотрим задачу изгиба цилиндрической оболочки под действием кольцевой нагрузки (рис. 4.10). Задача имеет аналитическое решение по классической теории оболочек [77], а также по теории оболочек типа Тимошенко [36]. Решение задачи методом конечных элементов сводится к решению системы уравнений (4.3.4). В данном решении, как и в работе [36], принято, что $\gamma=0$, т. е. не рассмотрены эффекты поперечного обжатия нормали. В этом случае конечный элемент имеет шесть степеней свободы в узле (CAU3W12).

Рассматривалась оболочка со следующими характеристиками нагрузки, материала и геометрии оболочки: $q=100$ Н/м; $h=0,01$ м; $R=0,20$ м; $L=2R$; $A_{11}=A_{22}=3500$ МПа; $A_{11}/A_{44}=A_{11}/A_{55}=20$; $A_{12}/A_{11}=0,35$.

Как известно [74], сходимость по энергии деформаций монотонна, если новые элементы строятся в результате разбиения старых. Асимптотические оценки сходимости [74] получены для этого случая. Поэтому сходимость следует рассматривать на равномерной разбивке, когда каждая следующая разбивка включает предыдущие. Как показано в работе [74], основные результаты которой кратко приведены в приложении 3, асимптотическая скорость сходимости производных i -го порядка от

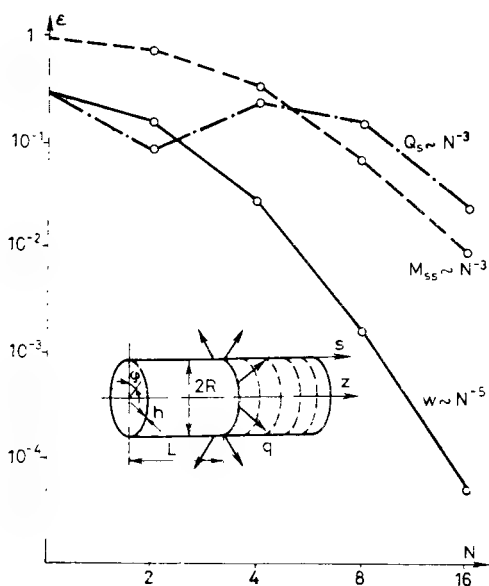


Рис. 4.10. Сходимость решения в задаче изгиба цилиндрической оболочки под действием кольцевой нагрузки

перемещений пропорциональна сумме $N^{-(k-i)} + N^{-2(k-m)}$, где N — число конечных элементов при равномерной разбивке; $k-1$ — степень аппроксимирующего полинома в конечном элементе; m — порядок высшей производной в минимизируемом функционале. Имея в нашем случае $k=4$ и $m=1$, для перемещений в среднем получаем N^{-4} , для изгибающих моментов и поперечных сил — N^{-3} , поскольку внутренние силы в теории типа Тимошенко вычисляются через первые производные от перемещений.

Асимптотическая скорость сходимости по энергии деформаций пропорциональна $U^{-2(k-m)}$ [74], т. е. в нашем случае она имеет

Таблица 4.1

Сходимость решения при равномерной разбивке

Показатель	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$	Аналитическое решение
w/h	1,4056	1,6961	1,9265	1,9789	1,9818	1,9819
M_{ss}/qh	0,064	0,205	0,541	0,759	0,809	0,817
Q_s/q	-0,359	-0,542	-0,662	-0,551	-0,511	-0,500
Кол-во степеней свободы	12	18	30	54	102	—

порядок N^{-6} . В табл. 4.1 показаны результаты решения при равномерной разбивке полудлины оболочки на различное число конечных элементов. Прогиб w , изгибающий момент M_{ss} и поперечная сила Q_s под нагрузкой при $s=0$, полученные численным решением, сравниваются со значениями, полученными аналитически [36]. В последней строке табл. 4.1 указано количество неизвестных при конечноэлементном решении (порядок системы уравнений (4.3.4) до учета граничных условий). На рис. 4.10 в логарифмическом масштабе изображено уменьшение относительной ошибки ε при размельчении разбивки. Относительная ошибка вычисляется по формуле

$$\varepsilon = \frac{f_* - f_T}{f_T}, \quad (4.3.6)$$

где f_* — значение величины по численному решению; f_T — значение величины по аналитическому решению.

При сравнении полученных результатов с теоретическими видно, что изгибающие моменты и поперечные силы имеют предсказанную сходимость, а прогибы — даже более быструю, что не является ошибочным, поскольку в специальных точках порядок сходимости может быть выше, чем в среднем. Например, под сосредоточенной нагрузкой сходимость решения по величине прогиба соответствует сходимости по энергии деформаций, так как прогиб под сосредоточенной силой согласно теореме Кастильяно определяется как производная энергии деформаций по силе. Поэтому в нашем случае прогиб при $s=0$ должен иметь асимптотическую сходимость порядка N^{-6} . Это согласуется с численными результатами (см. рис. 4.10).

Увеличения точности определения усилий и прогибов можно достичь путем неравномерной разбивки области. В местах с большими градиентами искомых функций следует применять более мелкую разбивку. В данном примере более мелкая разбивка должна быть под нагрузкой в зоне краевого эффекта. Вообще говоря, координаты расположения узлов должны быть минимизируемыми параметрами функционала, тогда после минимизации можно получить оптимальную разбивку для данной задачи при заданном числе узловых точек. Однако минимизация такого функционала приводит к необходимости решать систему нелинейных алгебраических уравнений. Это увеличивает стоимость вычислений и во многих случаях оказывается невыгодным. В табл. 4.2 представлены результаты для прогиба при $s=0$ в случае неравномерной разбивки. При сравнении результатов табл. 4.1 и 4.2 при одинаковом количестве неизвестных видно, что неравномерная разбивка области дает меньшую относительную погрешность результата. Поэтому в случае возможности предсказания мест больших градиентов перемещений

Таблица 4.2

Сходимость решения при неравномерной разбивке

Кол-во степеней свободы	48	90	174	342	Аналитическое решение
w/h	1,9815	1,9819	1,9819	1,9819	1,9819

следует пользоваться неравномерной разбивкой. Однако при равномерной разбивке по асимптотическим оценкам можно получить оценки погрешности результата. При расчете использовалась половина оболочки с граничными условиями $u = \gamma_s = 0$ при $s = 0$.

Чтобы исключить ошибки численного интегрирования, в данном примере матрица жесткости интегрировалась по схеме Гаусса четвертого порядка. Схема Гаусса порядка n точно интегрирует полином порядка $2n - 1$ [73]. В нашем случае для цилиндрического конечного элемента якобиан преобразования координат является константой, поэтому при интегрировании матрицы жесткости для кубической аппроксимации перемещений имеются полиномы шестого порядка. Таким образом, схема Гаусса четвертого порядка матрицу жесткости данного конечного элемента интегрирует точно.

4.3.2. Изгиб круговой тороидальной оболочки под действием внутреннего давления

Рассматривается пример изгиба круговой тороидальной оболочки (рис. 4.11), который может служить для проверки работоспособности конечного элемента, так как в тороидальных оболочках имеются участки положительной, отрицательной и нулевой гауссовой кривизны. Этот пример служил в качестве тестового и в работе [174], где приведены результаты различных авторов.

В данном примере конечный элемент следует модифицировать переходом от координатной системы s, φ к системе α, φ путем замены (П1.35).

При решении были приняты следующие исходные данные [174]: $L = 0,381$ м; $R = 0,254$ м; $h = 0,0127$ м; $E = 6,89 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$; $q = 6,89$ кПа. Материал оболочки изотропный. Зависимость функций прогиба w , меридионального N_{ss} и окружного $N_{\varphi\varphi}$ усилий от меридионального угла Ψ (см. рис. 4.11) полностью соответствует результатам работы [174], а мембранные усилия весьма близки к полученным по безмоментной теории. Однако тороидальная оболочка даже при внутреннем давлении

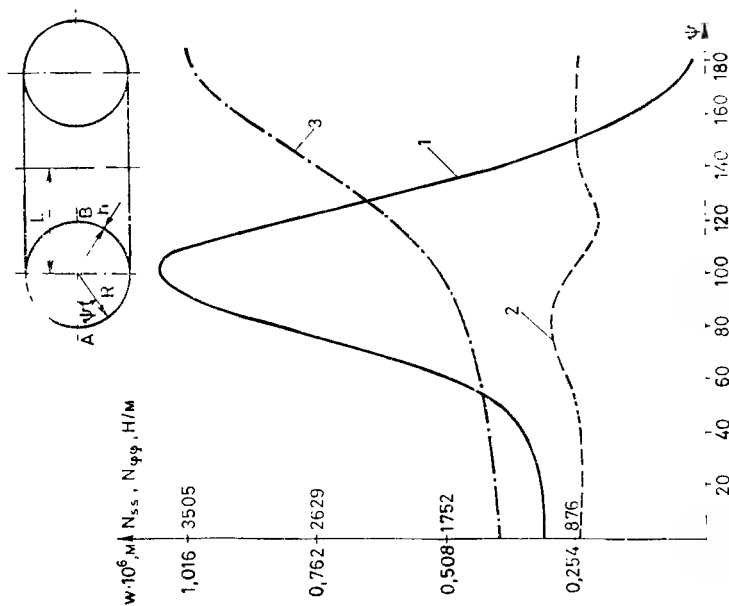


Рис. 4.11. Круговая торондальная оболочка под действием внешнего давления:
1 — прогиб w ; 2 — усилие по окружности $N_{\phi\phi}$; 3 — усилие по меридиану N_{ss}

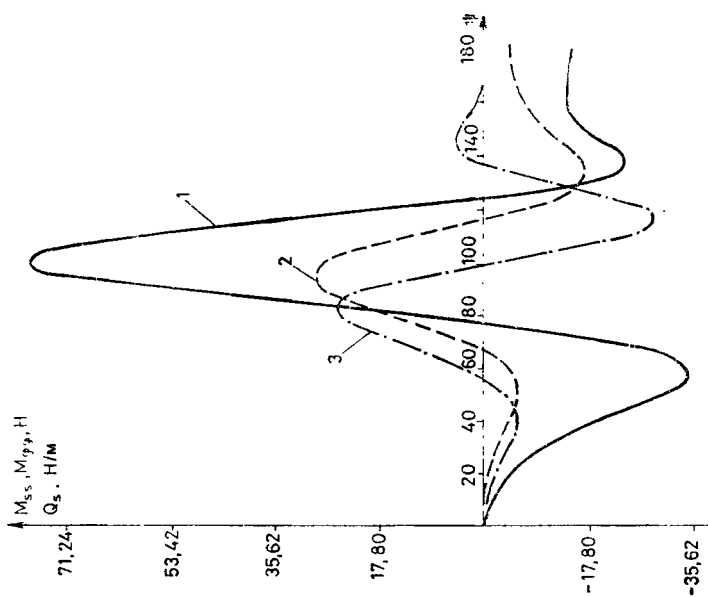


Рис. 4.12. Распределение изгибающих моментов и поперечных сил в торондальной оболочке:
1 — изгибающий момент M_{ss} ; 2 — изгибающий момент $M_{\phi\phi}$; 3 — поперечная сила Q_s

не находится в чисто безмоментном напряженном состоянии. Распределение изгибающих моментов M_{ss} и $M_{\varphi\varphi}$ и поперечной силы Q_s (рис. 4.12) качественно совпадает с результатами, приведенными в работе [31].

При расчете, исходя из симметричности задачи, рассматривалась лишь половина оболочки (ниже или выше экваториальной плоскости AB) с заданием в точках A и B граничных условий $u=\gamma_s=0$. Указанный участок меридиана оболочки разбивался на 18 конечных элементов.

4.3.3. Изгиб сферической оболочки под действием распределенного момента

Рассматривается деформирование полусферической усеченной оболочки (рис. 4.13) при следующих исходных данных [26]: $R=2,54$ м; $h/R=1/100$; $\alpha_0=30^\circ$; $E=6,74 \cdot 10^4$ МПа; $\nu=0,33$; $M_{ss}^*=4,35$ Нм/м. Оболочка разбивалась на 28 конечных элементов.

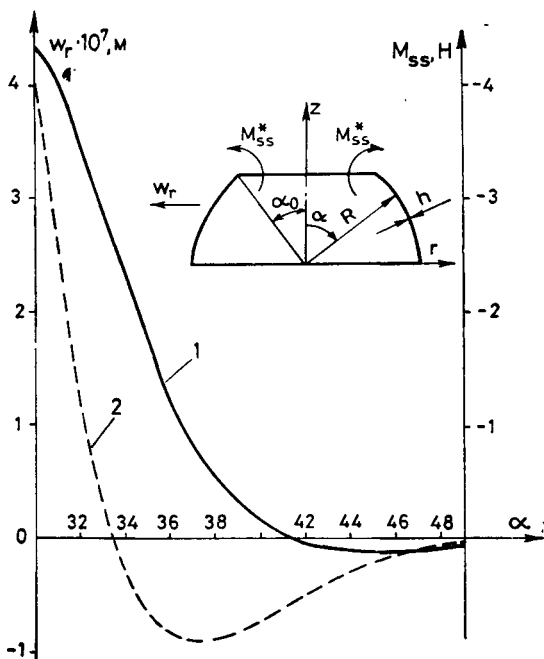


Рис. 4.13. Деформирование усеченной полусферической оболочки под действием распределенного момента:

1 — меридиональный момент M_{ss} ; 2 — горизонтальное перемещение w_r .

Результаты решения для горизонтального перемещения w , и меридионального момента M_{ss} (см. рис. 4.13) согласуются с результатами, приведенными в работе [26], и с аналитическим решением. На экваторе ($\alpha=90^\circ$) оболочка была защемлена и граничные условия были следующими: $u=w=\gamma_s=0$.

4.3.4. Изгиб заполненной жидкостью оболочки

В этом примере рассматривается деформирование оболочки вращения положительной гауссовой кривизны (рис. 4.14). Форма меридиана оболочки задается квадратичным полиномом.

$$r(z) = R \left[1 - 0,2 \left(\frac{z}{R} - 1 \right)^2 \right].$$

При этом приняты следующие геометрические и механические характеристики оболочки: $R=1,0$ м; $h/R=1/100$; $E=9,8 \cdot 10^4$ МПа; $\nu=0,3$. Граничные условия на защемленном конце ($s=0$) были следующими: $u=w=\gamma_s=0$.

На рис. 4.15 показано распределение по высоте оболочки мембранных усилий N_{ss} и $N_{\phi\phi}$ (сплошные линии) и проведено их сопоставление с полученными по безмоментной теории оболочек (штриховые линии). На рис. 4.16 показано распределение моментов M_{ss} , $M_{\phi\phi}$ и поперечной силы Q_s вблизи основания оболочки. Видно, что краевой эффект носит локальный

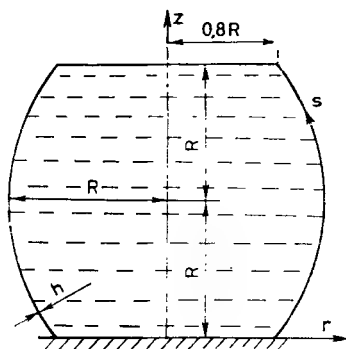
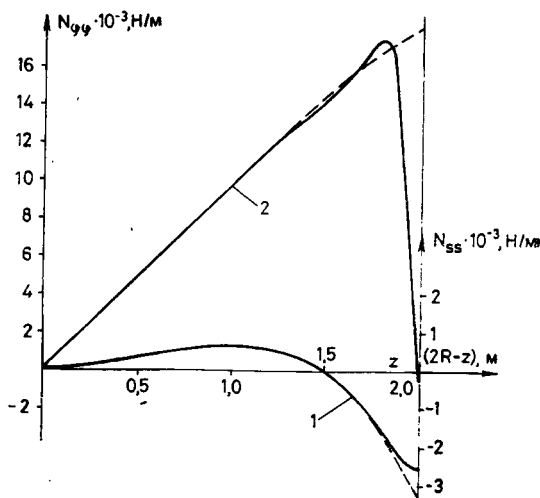


Рис. 4.14. Сосуд, заполненный водой

Рис. 4.15. Распределение мембранных усилий N_{ss} (1) и $N_{\phi\phi}$ (2) вдоль меридиана оболочки, заполненной водой



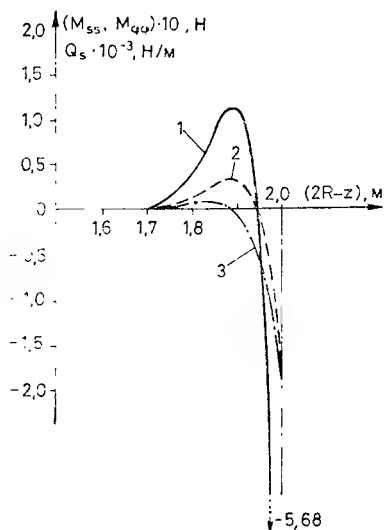
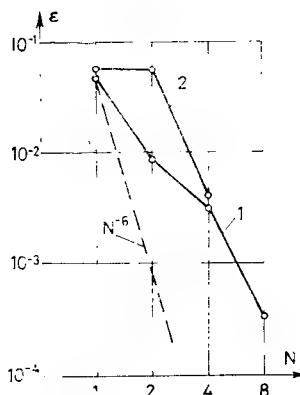


Рис. 4.16. Распределение изгибающих моментов M_{ss} (1), $M_{\phi\phi}$ (2) и поперечной силы Q_s (3) вблизи защемления для оболочки, заполненной водой

Рис. 4.17. Сходимость решения от числа конечных элементов в задаче устойчивости цилиндрической оболочки при внешнем давлении:

1 — безмоментное докритическое состояние; 2 — моментное докритическое состояние



характер и вдали от опоры на расстоянии $\sim 25h$ напряженное состояние оболочки является безмоментным.

Таким образом, рассматриваемый конечный элемент оболочки вращения может быть эффективно применен в решении различных задач изгиба. При этом могут рассматриваться задачи деформирования как тонких, так и толстостенных оболочек, а также анизотропных оболочек, слабо сопротивляющихся поперечному сдвигу.

4.4. ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ ГЛАДКИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Уравнение устойчивости оболочки определяется второй вариацией потенциальной энергии (3.4.20). В конечноэлементном представлении в этом уравнении варьируются узловые перемещения $\delta \mathbf{d}$. Так как эти вариации произвольны, то $\delta \mathbf{d} \neq 0$, что приводит к уравнению устойчивости в конечноэлементном представлении:

$$\mathbf{Kd} + \lambda \mathbf{Gd} = 0. \quad (4.4.1)$$

Здесь $\mathbf{K}$ и $\mathbf{G}$ — матрицы жесткости и геометрической жесткости оболочки, которые получаются суммированием матриц жест-

кости (4.2.22) и геометрической жесткости (4.2.35) отдельных конечных элементов; $\mathbf{d}$ — вектор возмущенных узловых перемещений. Наименьшее собственное значение уравнения (4.4.1) определяет критический параметр нагрузки λ_* и, следовательно, критическую нагрузку. При этом критическую нагрузку λ_*^n необходимо рассчитывать для каждого числа волн по окружности n . Наименьшая критическая нагрузка $\min \lambda_*^n$ определяет число волн n и форму потери устойчивости. Алгоритм нахождения наименьшего собственного значения для больших матриц ленточного вида изложен в приложении 2.

4.4.1. Устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении

Рассматривается цилиндрическая оболочка длиной L , радиусом R , толщиной h под действием чистого внешнего давления (без гидростатической нагрузки на торцах). Рассмотрим сходимость решения в задаче устойчивости трансверсально изотропной, защемленной по торцам цилиндрической оболочки при следующих исходных данных: $L=R=0,5$ м; $h=0,01$ м; $E=3,5 \cdot 10^3$ МПа; $\nu=0,35$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$. Ввиду симметрии формы потери устойчивости по длине рассматривалась половина оболочки. При этом граничные условия были следующими:

1) на торцах оболочки:

$$u=v=w=\gamma_s=0 \text{ при } s=0, L;$$

2) условия симметрии:

$$u=\gamma_s=0 \text{ при } s=L/2.$$

Рассматривались два случая определения критической нагрузки: бифуркация из безмоментного докритического состояния и бифуркация из моментного докритического состояния. В первом случае докритические усилия, входящие в матрицу геометрической жесткости (4.2.35), определяются из решения по безмоментной теории оболочек, во втором случае докритические усилия определяются из решения линейной задачи изгиба (4.3.4) цилиндрической оболочки в докритической стадии при заданной единичной нагрузке. Результаты решения при различном числе конечных элементов на полудлине оболочки (табл. 4.3) показывают, что учет моментности докритического состояния снижает критическую нагрузку примерно на 5%. Для более коротких оболочек это снижение может быть большим. Графики сходимости для этой задачи в логарифмическом масштабе изображены на рис. 4.17. Если докритическое состояние

определяется по аналитическому решению, как в случае безмоментного состояния, то асимптотические оценки для наименьшего собственного значения уравнения (4.4.1) (критическая нагрузка) и энергии деформации одинаковы, т. е. для рассматриваемого конечного элемента ошибка пропорциональна N^{-6} . Как видно из рис. 4.17, практическая асимптотическая сходимость как при безмоментном, так и при моментном докритическом состоянии соответствует теоретической и примерно равна N^{-6} . Так как определение моментного докритического состояния проводится численно и, как показано в параграфе 4.3, ошибка определения усилий пропорциональна N^{-3} , ошибка определения критической нагрузки в действительности будет несколько большей.

Рассмотрим влияние граничных условий на критическую нагрузку. Исследуем четыре случая граничных условий на торцах:

- 1) $u=v=w=0$ при $s=0, L$;
- 2) $w=0$ при $s=0, L$;
- 3) $u=w=0$ при $s=0, L$;
- 4) $v=w=0$ при $s=0, L$.

Параметры оболочки были следующими: $R=1$ м; $L/R=4$; $R/h=100$; $E=2,94 \cdot 10^4$ МПа; $\nu=1/6$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$. Оболочка на полудлине разбивалась на восемь конечных элементов ($N=8$). Во всех случаях критическая форма потери устойчивости соответствовала числу волн $n_*=4$. Полученные критические нагрузки для всех четырех случаев граничных условий были следующими: 94,9; 70,03; 93,01; 71,24 кПа. Результаты показывают, что в случае шарнирного опирания фиксация перемещений вдоль меридиана ($u=0$) приводит к повышению критической нагрузки примерно на 35%, что согласуется с результатами работы [23]. Критическая нагрузка, определенная без

Таблица 4.3

Сходимость решения при потере устойчивости цилиндрической оболочки под действием внешнего давления ($n_*=8$)

Показатель	Критическое внешнее давление q_* , МПа				
Число элементов на полудлине оболочки	$N=1$	$N=2$	$N=4$	$N=8$	$N=16$
Безмоментное докритическое состояние	0,3004	0,2875	0,2860	0,2851	0,2850
Моментное докритическое состояние	0,2875	0,2875	0,2722	0,2710	0,2710

фиксации перемещений вдоль меридиана, примерно равна критической нагрузке шарнирно опертой оболочки, полученной по упрощенному решению [14]. Отметим, что на практике никогда в чистом виде невозможно реализовать идеальные граничные условия, которые соответствуют теоретическим. Поэтому в практических решениях всегда следует рассматривать несколько комбинаций граничных условий.

4.4.2. Устойчивость тороидальной оболочки при внешнем давлении

Рассматривается задача потери устойчивости круговой тороидальной оболочки (см. рис. 4.11) под действием внешнего давления. Определение докритического напряженного состояния проводится так же, как в параграфе 4.3 для случая внутреннего давления. Результаты решения и их сравнение с результатами работ [25, 137] (табл. 4.4) подтверждают вывод о том, что в заданной области изменения параметров оболочки наименьшая критическая нагрузка соответствует форме *B*, антисимметричной (рис. 4.18) относительно экваториальной плоскости *AB*, но симметричной ($n=0$) относительно оси вращения. Критическая нагрузка при неосесимметричной форме потери устойчивости ($n=2$) всегда выше, чем при осесимметричной ($n=0$). Сопоставление теоретических и экспериментальных (из работы [96]) критических нагрузок для круговой тороидальной оболочки при внешнем давлении (табл. 4.5) показало,

Таблица 4.4

Безразмерные критические нагрузки $\bar{q} = qR^2/Eh_2$ круговой тороидальной оболочки при внешнем давлении ($R/h=20$; $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$)

L/R	Симметричные относительно плоскости AB формы (A)			Антисимметричные относительно плоскости AB формы (B)			
	Осесимметричные формы ($n=0$) q_0^a	Неосесимметричные формы ($n=2$) q_2^a		Осесимметричные формы ($n=0$) q_0^a (критическая нагрузка)		Неосесимметричные формы ($n=2$) q_2^a	
	[137]	[137]	CAU3W20	CAU3W20	[25]	[137]	[137]
1,2	0,2575	0,1481	0,145	0,0619	0,06081	0,06322	0,1565
1,5	0,2234	0,08718	0,0866	0,0525	0,05241	0,05363	0,08551
2,0	0,1839	0,06036	0,0597	0,0426	0,04327	0,04267	0,06929
4,0	0,1119	0,03614	0,0354	0,02662	0,02727	0,02692	0,07267
8,0	0,06479	0,02331	0,0189	0,0161	0,01719	0,01739	0,05303
20,0	0,03200	0,01710	0,0378	0,00994	0,00934	0,01058	0,03032
30,0	0,02436	0,01582	0,0244	0,00681	0,00713	0,00780	0,02505

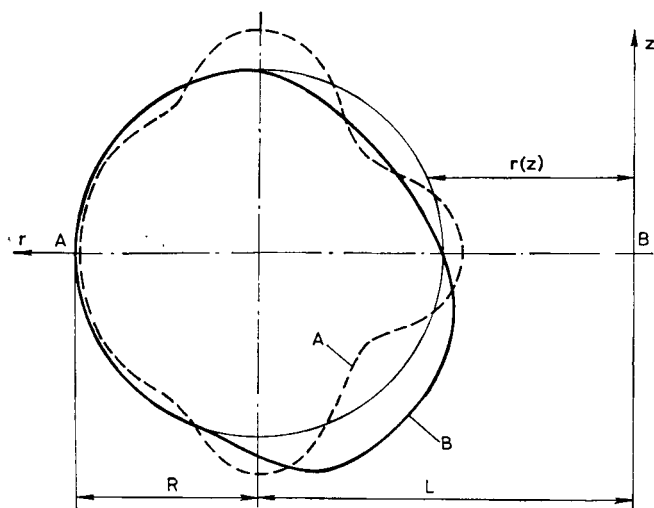


Рис. 4.18. Характерные формы потери устойчивости круговой тороидальной оболочки при внешнем давлении:

A — симметричная форма; *B* — антисимметричная относительно экваториальной плоскости форма

что во всех вариантах наименьшая теоретическая критическая нагрузка соответствовала осесимметричной ($n=0$) относительно оси вращения и антисимметричной относительно экваториальной плоскости *AB* форме потери устойчивости. Хорошее соответствие теоретических и экспериментальных критических нагрузок позволяет рекомендовать применение линеаризованного подхода для практических расчетов устойчивости круговых тороидальных оболочек.

Таблица 4.5

Критические нагрузки q_0^a круговой тороидальной оболочки при внешнем давлении ($E=2,16 \cdot 10^3$ МПа; $\nu=0,365$)

№ опыта	L/R	R/h	Эксперимент [96] $q_0 \cdot 10^3$, Па	Решение МКЭ ($n=0$; форма <i>B</i>) $q_0 \cdot 10^3$, Па	Отклонение $\frac{q^3 - q^T}{q^T} \cdot 100$, %
1	7,94	23,25	57,8	62,4	-7,4
2	3,57	25,00	101,0	94,8	+6,5
3	2,34	47,61	27,7	27,6	+0,4
4	2,34	23,25	161,5	151,2	+6,8
5	1,37	90,90	9,6	9,5	+1,0

4.4.3. Устойчивость оболочки вращения при внешнем давлении

Рассматривается оболочка с выпуклой и вогнутой формами меридиана (рис. 4.19). Кривая меридиана оболочки является квадратичной параболой:

$$r(z) = r_0 + \frac{2(r_m - r_0)z}{L/2} + \frac{r_0 - r_m}{(L/2)^2} z^2.$$

В расчетах изменялось отношение r_m/r_0 и были приняты следующие исходные данные: $L/r_0 = 4$; $r_0/h = 100$; $E = 2,94 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 1/6$. Рассматривались два варианта граничных условий:

1) шарнирное опирание

$$w = 0 \text{ при } z = 0, L;$$

2) жесткая заделка

$$u = v = w = \gamma_s = 0 \text{ при } z = 0, L.$$

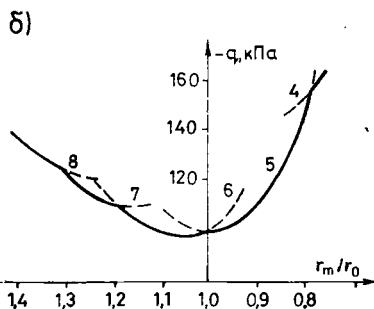
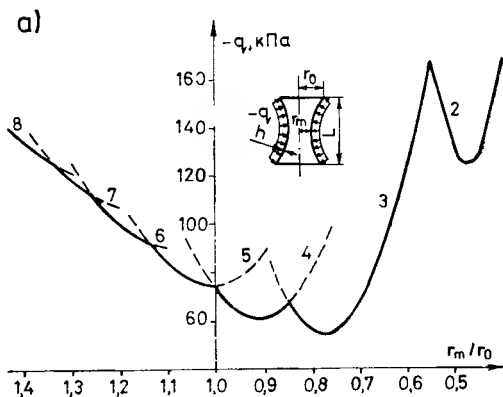


Рис. 4.19. Критические нагрузки оболочки вращения при внешнем давлении при граничных условиях шарнирного опирания (а) и жесткого защемления (б). Цифры у кривых означают количество волн в окружном направлении, соответствующих критической нагрузке

Для случая шарнирного опирания такой же пример в работе [115] был решен методом конечных разностей. Результаты этой работы полностью согласуются с графиками на рис. 4.19, а. Из рис. 4.19 видно, что ограничение меридионального перемещения ($u=0$) качественно изменяет характер влияния параметра r_m/r_0 на критическую нагрузку. Для вогнутой оболочки при $u=0$ критическая нагрузка возрастает по сравнению с цилиндрической оболочкой ($r_m/r_0=1$). Без фиксации меридионального перемещения критическая нагрузка для вогнутой оболочки сначала снижается. Критические нагрузки для обоих вариантов граничных условий при $r_m/r_0=0,8$ различаются примерно в 2 раза.

4.4.4. Устойчивость цилиндрической оболочки из стеклопластика со сферическими днищами при внешнем давлении

Для однородной металлической оболочки этот случай был рассмотрен в работе [51]. Рассмотрим пример решения задачи устойчивости при внешнем давлении для оболочки из волокнистого композита — стеклопластика (рис. 4.20). Оболочка изготовлена намоточным способом из стеклопластиковых монослоев со следующими характеристиками: $E_1=56\,000$ МПа; $E_2=E_3=14\,000$ МПа; $\nu_{12}=0,29$; $\nu_{21}=0,0721$; $G_{12}=4510$ МПа; $G_{23}=4080$ МПа. Ось 1 направлена вдоль волокон, а оси 2 и 3 расположены в плоскости изотропии монослоев. Оболочка изготовлена из слоев двух типов, слои первого типа наматываются под переменным углом $\pm\beta$ по геодезической линии оболочки и образуют пакет слоев с ква-

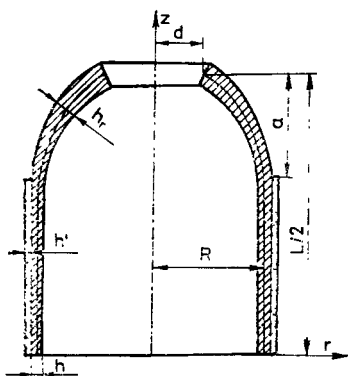


Рис. 4.20. Оболочка вращения из стеклопластика

зиоднородной по толщине структурой; слои второго типа толщиной h' намотаны в цилиндрической части оболочки поверх внутреннего слоя под углом 90° , т. е. в окружном направлении. Для слоев первого типа в сферической части выполняются условия геодезической намотки и условия неразрывности намотки [45]:

$$R \sin \beta_0 = r \sin \beta;$$

$$hR \cos \beta_0 = h_r r \cos \beta,$$

где β_0 и β — углы армирования по отношению к меридиану в цилиндрической и сферической частях соответственно; h и h_r — толщина

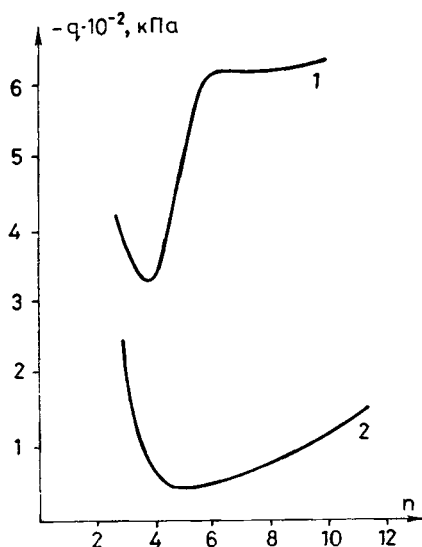
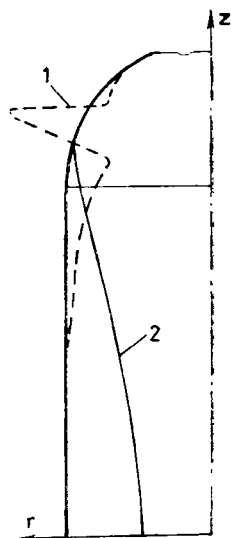


Рис. 4.21. Зависимость критической нагрузки от числа волн по окружности: 1 — неоднородная оболочка $h=h'$; 2 — квазиоднородная оболочка $h'=0$

Рис. 4.22. Характерные формы потери устойчивости стеклопластиковой оболочки при внешнем давлении:

1 — для неоднородной оболочки; 2 — для квазиоднородной оболочки



оболочки в цилиндрической и сферической частях соответственно. Таким образом, в сферической части оболочка имеет переменную толщину с квазиоднородным пакетом слоев под переменным углом $\pm\beta$, а в цилиндрической части — неоднородные пакеты слоев: один пакет слоев под углом $\pm\beta$, а второй пакет слоев под углом $\beta_2=90^\circ$. Вследствие симметрии рассматривалась половина оболочки. Были приняты следующие геометрические характеристики: $L/R=5$; $R/h=100$; $d=R/3$; $\sin\beta_0=0,25$. Зависимость критической нагрузки от числа волн по окружности показана на рис. 4.21. Для квазиоднородной оболочки имеется один минимум при $n_*=5$, для неоднородной оболочки имеются два минимума при $n_*=4$ и $n_*=8$. Формы потери устойчивости по меридиану также качественно различаются (рис. 4.22).

4.5. РАСЧЕТ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ С КОЛЬЦЕВОЙ СИСТЕМОЙ РЕБЕР

При расчете оболочек вращения с кольцевой системой ребер или разветвленных оболочек необходимо объединить конечные элементы из различных ансамблей в одну глобальную систему

координат первого уровня. В нашем случае это система цилиндрических координат r, z . Согласно формулам (4.2.22), (4.2.30), (4.2.35) и (4.2.38) матрицы жесткости, масс, геометрической жесткости и вектор узловых сил определены в системе координат второго уровня s, x_3 . Координата по окружности φ оболочки вращения для обеих систем координат общая. Переход от одной системы координат к другой осуществляется на основе соотношений трансформации узловых перемещений конечного элемента. В нашем случае для каждого из двух узлов $i=1, 2$ конечного элемента можно записать

$$\mathbf{d}_i^e = \mathbf{T}_i \tilde{\mathbf{d}}_i^e. \quad (4.5.1)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{d}}_i^e$ — узловые перемещения в глобальной системе координат r, z ; $\mathbf{T}_i$ ($i=1, 2$) — кососимметричная матрица трансформации ($T_{ij} = -T_{ji}$), которая имеет следующие ненулевые компоненты (θ — угол касательной к меридиану s с осью вращения z (см. рис. 4.7)):

$$\begin{aligned} T_{1,1}^i &= \cos \theta_i; & T_{1,5}^i &= \sin \theta_i; \\ T_{2,1}^i &= -\sin \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; & T_{2,6}^i &= \sin \theta_i; \\ T_{2,5}^i &= \cos \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; & T_{2,6}^i &= \sin \theta_i; \\ T_{3,3}^i &= T_{4,4}^i = 1; & T_{5,1}^i &= -\sin \theta_i; \\ T_{5,5}^i &= \cos \theta_i; & T_{6,1}^i &= -\cos \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; \\ T_{6,2}^i &= \cos \theta_i; & T_{6,5}^i &= -\sin \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; \\ T_{6,6}^i &= \cos \theta_i; & T_{7,7}^i &= \cos \theta_i; \\ T_{7,11}^i &= \sin \theta_i; & T_{8,7}^i &= -\sin \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; \\ T_{8,8}^i &= \cos \theta_i; & T_{8,11}^i &= \cos \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; \\ T_{8,12}^i &= \sin \theta_i; & T_{9,9}^i &= T_{10,10}^i = 1; \\ T_{11,7}^i &= -\sin \theta_i; & T_{11,11}^i &= \cos \theta_i; \\ T_{12,7}^i &= -\cos \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; & T_{12,8}^i &= -\sin \theta_i; \\ T_{12,11}^i &= -\sin \theta_i \left(\frac{d\theta}{ds} \right)_i; & T_{12,12}^i &= \cos \theta_i. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

При трансформации перемещений из координатной системы s, x_3 в систему r, z по формулам (4.5.1) потенциальная энергия конечного элемента (4.3.1) не должна меняться. Подставляя (4.5.1) для узлов $i=1, 2$ в (4.3.1), получаем

$$\Pi^e = \frac{1}{2} \tilde{\mathbf{d}}_e^T \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{d}}_e - \tilde{\mathbf{d}}_e^T \tilde{\mathbf{F}}_e. \quad (4.5.3)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{K}}_e$ — матрица жесткости в глобальной системе координат r, z :

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}; \quad (4.5.4)$$

$\tilde{\mathbf{F}}_e$ — вектор узловых сил в глобальной системе координат r, z :

$$\tilde{\mathbf{F}}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{F}_e. \quad (4.5.5)$$

В формулах (4.5.4) и (4.5.5) $\mathbf{T}$ — матрица трансформаций для обоих узлов конечного элемента:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \quad (4.5.6)$$

Так как матрица трансформаций $\mathbf{T}$ ортогональная, имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^T \mathbf{T} &= \mathbf{I}; \\ \mathbf{T}^T &= \mathbf{T}^{-1}. \end{aligned} \quad (4.5.7)$$

С учетом этого формула преобразования (4.5.5) имеет вид

$$\tilde{\mathbf{F}}_e = \mathbf{T}^{-1} \mathbf{F}_e.$$

Из этой формулы получаем обратные соотношения трансформации узловых сил

$$\mathbf{F}_e = \mathbf{T} \tilde{\mathbf{F}}_e. \quad (4.5.8)$$

Таким образом, узловые силы (4.5.8) преобразуются по тем же соотношениям, что и узловые перемещения (4.5.1).

Формулы (4.5.4) и (4.5.5) применяются при расчете оболочек вращения с кольцевой системой ребер. В этом случае конечные элементы в обшивке и ребрах определены в различных координатных системах и с помощью формул (4.5.4) и (4.5.5) матрица жесткости и вектор узловых сил конечных элементов приводятся к глобальной системе координат r, z .

По такой методике проведен расчет устойчивости цилиндрических и конических оболочек с кольцевой системой ребер при

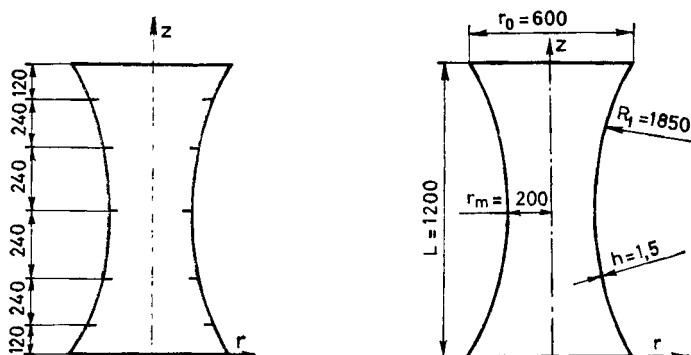


Рис. 4.23. Геометрические характеристики гиперboloидальных оболочек.
Все размеры указаны в мм

их оптимизации по массе [60, 69]. Данная методика расчета позволяет определять как общую, так и местные формы потери устойчивости обшивки и ребер, а также связанные формы потери устойчивости.

Рассмотрим решение задачи устойчивости при внешнем давлении гладких и ребристых гиперboloидальных оболочек из полимерного материала (рис. 4.23). На таких модельных оболочках проведены эксперименты, описанные в работе [124]. Геометрические характеристики оболочек показаны на рис. 4.23. Упругие свойства материала обшивки и ребер следующие: $E=3450$ МПа; $\nu=0,38$. Кольцевые подкрепления оболочки выполнены из того же материала, что и обшивка, и имеют сечения прямоугольной формы высотой 7,5 мм и шириной 2,5 мм. Торцы оболочки жестко зашлемлены. При решении задачи устойчивости по уравнению (4.4.1) для гладкой оболочки получена критическая нагрузка $q_*=8,65$ кПа. В работе [124] для гладкой оболочки приведены следующие критические нагрузки: расчетная $q_*=8,63$ кПа, экспериментальная $q_*^э=6,80$ кПа.

Для ребристой оболочки уравнение устойчивости (4.4.1) записывается в глобальных координатах:

$$\tilde{\mathbf{K}}\tilde{\mathbf{d}} + \lambda\tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{d}} = 0. \quad (4.5.9)$$

Здесь $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{d}}$ — матрицы жесткости, геометрической жесткости и вектор узловых перемещений в глобальной системе координат.

Решение задачи устойчивости по уравнению (4.5.9) для ребристой оболочки при горизонтальном расположении шпангоутов и при их прикреплении перпендикулярно к обшивке дает критические нагрузки $q_*=13,51$ кПа и $q_*=14,23$ кПа соответ-

ственно. В работе [124] для ребристой оболочки приведены расчетная ($q_* = 11,71$ кПа) и экспериментальная ($q_*^э = 9,00$ кПа) критические нагрузки. Характерные формы потери устойчивости рассматриваемых оболочек показаны на рис. 4.24. При расчете гладкие оболочки разбивались на 20 конечных элементов, ребристые оболочки в пролете между шпангоутами — на четыре элемента, а само ребро представляет собой один конечный элемент.

Другой пример расчета на устойчивость ребристой оболочки при внешнем давлении представлен на рис. 4.25. Геометрические и механические параметры оболочек следующие: $R = 2,54$ м; $L/R = 1,5$; $l = 0,762$ м; $l_1 = 0,1869$ м; $l_2 = 0,1016$ м; $h = 0,0254$ м; $h_1 = 0,0081$ м; $h_2 = 2h_1$; $E = 6,89 \cdot 10^4$ МПа; $\nu = 0,3$. Расположение шпангоутов в оболочке внешнее или внутреннее. Ребра равномерно расположены по длине оболочки. При расчете половина оболочки разбивалась на 21 конечный элемент: участок DE — на шесть элементов, а участки AB , BC и BD — на один элемент. Вычисления проводились как для внешнего, так и для внутреннего расположения шпангоутов. На торцах оболочки заданы граничные условия $u = w = 0$. В середине оболочки заданы условия симметрии $u = \gamma_s = 0$. Вводим обозначение для безразмерного внешнего давления: $\bar{q} = q(1 - \nu^2)/Eh$. При внешнем расположении шпангоутов получена критическая

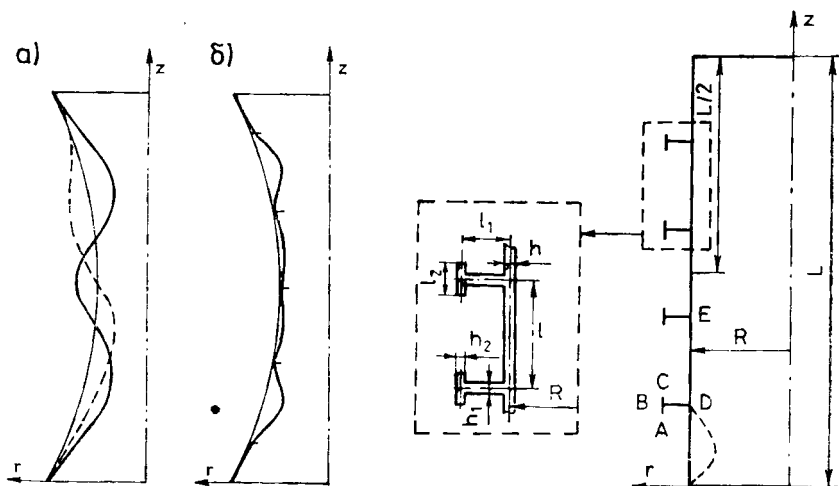


Рис. 4.24. Характерные формы потери устойчивости гладких (а) и ребристых (б) гиперболицидальных оболочек при внешнем давлении

Рис. 4.25. Геометрия и форма потери устойчивости, подкрепленной шпангоутами цилиндрической оболочки при внешнем давлении

нагрузка $\bar{q}_* = 7,421 \cdot 10^{-3}$. При внутреннем расположении шпангоутов критическая нагрузка примерно на 7% выше: $\bar{q}_* = 7,909 \cdot 10^{-3}$. Число волн по окружности ($n_* = 13$) одинаково для обоих случаев. Форма потери устойчивости вдоль меридиана в обоих случаях приблизительно одинакова (штриховая линия на рис. 4.25). В работе [162] при внешнем расположении ребер для такой же оболочки получена критическая нагрузка $\bar{q}_* = 7,339 \cdot 10^{-3}$.

Таким образом, конечный элемент *CAU3W24* может быть эффективно применен в расчетах деформирования оболочек вращения с кольцевой системой ребер.

4.6. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

Уравнение движения механической системы с конечным числом степеней свободы было получено в параграфе 1.9 из условия стационарности функционала Гамильтона. Уравнение движения (1.9.9) для оболочки при ее конечноэлементной аппроксимации с учетом того, что $L = T - U$, и при отсутствии внешних сил ($F_r = 0$) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{a}^T} \right) + \frac{\partial U}{\partial a^T} = 0. \quad (4.6.1)$$

Используя дискретную форму функционалов кинетической энергии (4.2.29) и энергии деформаций (4.2.21) в уравнении Лагранжа (4.6.1), получаем следующее уравнение движения оболочки при отсутствии внешних сил и демпфирования:

$$\mathbf{K} \mathbf{d} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{d}} = 0. \quad (4.6.2)$$

При свободных колебаниях оболочек все узловые точки совершают гармонические колебания во времени:

$$\mathbf{d} = \mathbf{d}_0 \sin \omega t. \quad (4.6.3)$$

Здесь ω — частота гармонических колебаний. Подставляя разложение (4.6.3) в уравнение движения оболочки (4.6.2), получаем частотное уравнение

$$\mathbf{K} \mathbf{d}_0 - \omega^2 \mathbf{M} \mathbf{d}_0 = 0. \quad (4.6.4)$$

Спектр частот колебаний оболочки определяет собственные значения этого уравнения. Низшую частоту собственных колебаний для больших матриц $\mathbf{K}$ и $\mathbf{M}$ ленточного вида можно определить по алгоритму, изложенному в приложении 2.

В качестве примера применения конечного элемента *CAU3W20* для определения собственных частот рассмотрим за-

Т а б л и ц а 4.6

Собственные частоты шарнирно опертой цилиндрической оболочки

Число волн		Аналитическое решение [168], Гц	Конечный элемент CAU3W20 (N=20), Гц
по окружности n	по меридиану m		
2	1	2046,8	2045
3	1	2199,3	2190

дачу колебаний цилиндрической оболочки при граничных условиях шарнирного опирания

$$v=w=0 \text{ при } s=0, L.$$

Для симметричных относительно плоскости $s=L/2$ форм колебаний в конечноэлементном анализе можно рассматривать полудлину оболочки с условиями симметрии

$$u=\gamma_s=0 \text{ при } s=L/2.$$

Параметры оболочки были следующими: $R=0,0508$ м; $L/R=4$; $h=0,254 \cdot 10^{-2}$ м; $E=2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$; $\rho=7,85 \cdot 10^3$ кг/м³. Результаты решения представлены в табл. 4.6. Оболочка разбивалась на 20 конечных элементов на полудлине. Настоящее решение хорошо согласуется с конечноэлементным решением, описанным в работе [149]. Для сравнения представлены собственные частоты, полученные аналитически [168]. Для низших частот результаты аналитического и конечноэлементного решений почти совпадают. Порядок сходимости для низшей частоты соответствует порядку сходимости по энергии деформаций, т. е. асимптотически она пропорциональна N^{-6} .

4.7. КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

Рассматривается круглая пластина (рис. 4.26) в полярных координатах ρ, φ, z ($x^1=\rho$; $x^2=\varphi$; $x_3=z$). При осесимметричных поперечных нагрузках однородная пластина деформируется без мембранных деформаций ($u=v=\gamma_\varphi=0$) и кинематические соотношения (1.3.25) принимают вид

$$\begin{aligned} \chi_{\rho\rho} &= \frac{\partial \gamma_\rho}{\partial \rho}; & \chi_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{\rho} \gamma_\rho; \\ 2\Omega_{\rho z} &= \gamma_\rho + \frac{\partial w}{\partial \rho}. \end{aligned} \quad (4.7.1)$$

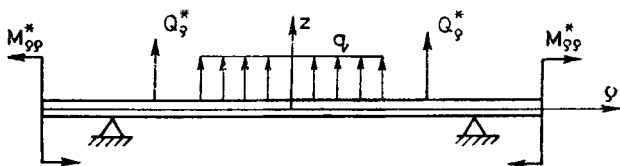


Рис. 4.26. Круглая пластина в полярных координатах

Матрица деформаций $\varepsilon^T = \{\chi_{\rho\rho}, \chi_{\varphi\varphi}, 2\Omega_{\rho\varphi}\}$ связана с матрицей перемещений $u^T = \{w, \gamma_\rho\}$ зависимостью

$$\varepsilon = Lu. \quad (4.7.2)$$

Здесь L — матрица операторов дифференцирования:

$$L = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial \rho} \\ 0 & \frac{1}{\rho} \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.7.3)$$

Функционал энергии деформаций (1.4.5) для круглой пластины при осесимметричных нагрузках имеет вид

$$\begin{aligned} U &= \pi \int (M_{\rho\rho}\chi_{\rho\rho} + M_{\varphi\varphi}\chi_{\varphi\varphi} + 2Q_\rho\Omega_{\rho\varphi}) \rho d\rho = \\ &= \pi \int \sigma^T \varepsilon \rho d\rho. \end{aligned} \quad (4.7.4)$$

Здесь $\sigma^T = \{M_{\rho\rho}, M_{\varphi\varphi}, Q_\rho\}$ — матрица моментов и поперечных сил. Физические соотношения (1.5.8) для трансверсально изотропной однородной по толщине пластины принимают вид

$$\sigma = D\varepsilon, \quad (4.7.5)$$

где элементы матрицы D выражаются через модуль упругости E и коэффициент Пуассона ν в плоскости пластины и через модуль поперечного сдвига G_{13} :

$$D = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12}{h^2} k G_{13} \end{bmatrix} \quad (4.7.6)$$

Функционал энергии деформаций для круглой пластины (4.7.4) с учетом (4.7.5) определяется через деформации:

$$U = \pi \int \epsilon^T D \epsilon \rho d\rho. \quad (4.7.7)$$

Для кольцевого конечного элемента пластины шириной $H = \rho_2 - \rho_1$ (рис. 4.27) принимаем такую же аппроксимацию для перемещений, как для оболочки вращения в параграфе 4.2:

$$u = N d_e. \quad (4.7.8)$$

Здесь d_e — матрица узловых перемещений:

$$d_e^T = \{d_1^{eT}, d_2^{eT}\};$$

$$d_i^{eT} = \left\{ w_i, \left(\frac{dw}{d\rho} \right)_i, \gamma_\rho^i, \left(\frac{d\gamma_\rho}{d\rho} \right)_i \right\}, \quad i=1, 2. \quad (4.7.9)$$

Матрица N в (4.7.8) содержит функции формы N_i и N_i^* ($i=1, 2$) конечного элемента (4.2.5):

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & JN_1^* & 0 & 0 & N_2 & JN_2^* & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & JN_1^* & 0 & 0 & N_2 & JN_2^* \end{bmatrix} \quad (4.7.10)$$

Глобальную координату ρ пластины и локальную координату ξ (см. рис. 4.27) связывает линейная зависимость

$$\rho = \rho_0 + \frac{H}{2}\xi; \quad \xi = \frac{2}{H}\rho - \frac{\rho_0}{H}. \quad (4.7.11)$$

С учетом этого якобиан преобразования координат имеет постоянное значение в пределах конечного элемента шириной H :

$$J = \frac{d\rho}{d\xi} = \frac{H}{2}; \quad J^{-1} = \frac{d\xi}{d\rho} = \frac{2}{H}. \quad (4.7.12)$$

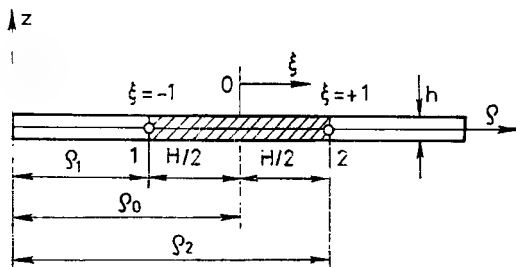


Рис. 4.27. Координаты конечного элемента круглой пластины

Подстановка (4.7.8) в (4.7.2) приводит к кинематическим соотношениям для конечного элемента

$$\varepsilon = \mathbf{B}(\xi) \mathbf{d}_e. \quad (4.7.13)$$

Здесь $\mathbf{B}(\xi) = \mathbf{LN}(\xi)$ — матрица связи деформаций с узловыми перемещениями, ненулевые компоненты которой определяются в следующем виде:

$$\begin{aligned} B_{13} &= \frac{2}{H} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}; & B_{14} &= \frac{\partial N_1^*}{\partial \xi}; & B_{17} &= \frac{2}{H} \frac{\partial N_2}{\partial \xi}; \\ B_{18} &= \frac{\partial N_2^*}{\partial \xi}; & B_{23} &= \frac{N_1}{\rho_0 + \frac{H}{2} \xi}; & B_{24} &= \frac{HN_1^*}{2 \left(\rho_0 + \frac{H}{2} \xi \right)}; \\ B_{27} &= \frac{N_2}{\rho_0 + \frac{H}{2} \xi}; & B_{28} &= \frac{HN_2^*}{2 \left(\rho_0 + \frac{H}{2} \xi \right)}; & B_{31} &= \frac{2}{H} \frac{\partial N_1}{\partial \xi}; \\ B_{32} &= \frac{\partial N_1^*}{\partial \xi}; & B_{33} &= N_1; & B_{34} &= \frac{H}{2} N_1^*; & B_{35} &= \frac{2}{H} \frac{\partial N_2}{\partial \xi}; \\ B_{36} &= \frac{\partial N_2^*}{\partial \xi}; & B_{37} &= N_2; & B_{38} &= \frac{H}{2} N_2^*. \end{aligned}$$

Подставляя (4.7.13) в функционал (4.7.7), получаем

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e,$$

где $\mathbf{K}_e$ — матрица жесткости конечного элемента круглой пластины:

$$\mathbf{K}_e = 2\pi \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{H}{2} \left(\rho_0 + \frac{H}{2} \xi \right) d\xi. \quad (4.7.14)$$

Матрицу $\mathbf{K}_e$ получают численным интегрированием, так как ее элементы содержат рациональные функции. Эквивалентные узловые силы от распределенной нагрузки q вычисляются по формуле

$$\mathbf{F}_{q^e} = 2\pi \int \mathbf{N}^T q \rho d\rho = 2\pi \int_{-1}^1 \mathbf{N}^T q \left(\rho_0 + \frac{H}{2} \xi \right) \frac{H}{2} d\xi. \quad (4.7.15)$$

Здесь $\mathbf{q}^T = \{q, 0\}$. Положительные направления узловых сил конечного элемента показаны на рис. 4.28.

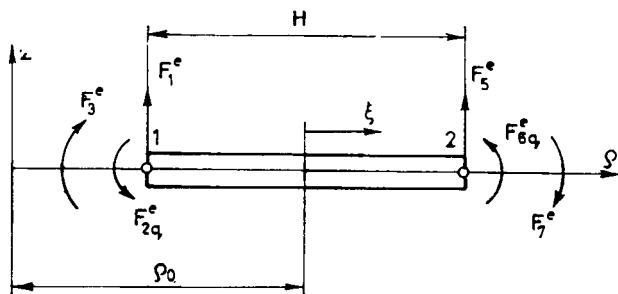


Рис. 4.28. Узловые силы конечного элемента круглой пластины

Следует отметить, что от действия распределенной нагрузки q в узлах появляются эквивалентные моменты F_{2q}^e и F_{6q}^e . Они совершают работу на производную от прогиба dw/dr в этих узлах. В то же время внешние моменты $M_{\rho\rho}^*$, умноженные на $2\pi r$, следует в ближайшем узле прибавить к силам F_3^e или F_7^e , которые имеют знак, противоположный знаку сил F_2^e и F_6^e . Силы F_3^e и F_7^e совершают работу на углы поворота γ_ρ . Узловые перемещения — повороты dw/dr и γ_ρ в теории типа Тимошенко имеют противоположные положительные направления.

Здесь следует отметить, что в теории типа Тимошенко граничные условия в защемлении и условия симметрии задаются только через углы поворота ($\gamma_\rho = 0$), так как вместе с прогибом w углы поворота γ_ρ являются главными граничными условиями. Производная dw/dr не является главным граничным условием, а в защемлении она является естественным граничным условием.

4.8. КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ БАЛКИ ТИМОШЕНКО

В простейших случаях задач изгиба, устойчивости и колебаний балок Тимошенко [16, 126] получены аналитические решения. Однако балка Тимошенко может быть элементом составной стержневой конструкции, ребром жесткости в подкрепленных пластинах и оболочках и в других конструкциях. Получить аналитические решения в этих случаях затруднительно. Аналитические решения трудно получить и для задач нестационарной динамики, а также для задач нелинейного деформирования балок. Во всех этих задачах решение может быть получено методом конечных элементов. Поэтому рассмотрим вывод матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости для

согласованного конечного элемента балки Тимошенко с кубической аппроксимацией перемещений [59].

Ранее были предложены матрицы жесткости для ряда конечных элементов балки Тимошенко [9, 129, 141 и др.]. Однако каждый из этих элементов имел определенные недостатки. Например, для конечного элемента балки Тимошенко, рассмотренного в работах [9, 141], невозможно корректно учесть граничные условия в защемлении. Другие недостатки ряда конечных элементов балки Тимошенко обсуждены в работе [165]. С точки зрения вариационной постановки на основе функционалов Лагранжа упомянутые конечные элементы являются несогласованными. Согласованная аппроксимация для конечного элемента балки Тимошенко предложена в работе [165]. Однако там проведена независимая аппроксимация не только функций прогиба и угла поворота, но и деформации поперечного сдвига. Поэтому конечный элемент балки Тимошенко, предложенный в работе [165], скорее всего принадлежит к элементам смешанного типа. Конечный элемент балки Тимошенко, аналогичный описанному в работе [59], был рассмотрен в работе [78]. Этот конечный элемент является полностью согласованным. Вывод необходимых для решения матриц приведен далее.

4.8.1. Матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости

Рассмотрим балку в декартовой системе координат ($x^1=x$; $x^2=y$; $x^3=z$) и ее деформирование в плоскости x, z (рис. 4.29). Если пренебречь деформациями обжатия нормали ($\gamma=0$), то кинематические соотношения для балки Тимошенко (1.3.26) принимают вид

$$\chi_{xx} = \frac{\partial \gamma_x}{\partial x}; \quad 2\Omega_{xz} = \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x}. \quad (4.8.1)$$

В матричной записи кинематические соотношения (1.3.27) для балки имеют вид

$$\epsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}, \quad (4.8.2)$$

где $\epsilon^T = \{\chi_{xx}, 2\Omega_{xz}\}$ — матрица деформаций; $\mathbf{u}^T = \{w, \gamma_x\}$ — матрица перемещений; $\mathbf{L}$ — матрица операторов дифференцирования:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{bmatrix} \quad (4.8.3)$$

Энергия деформаций балки (1.10.22) в матричной записи имеет вид

$$U^e = \frac{1}{2} \int_0^l \sigma^T \varepsilon dx. \quad (4.8.4)$$

Здесь $\sigma^T = \{M_{xx}, Q_x\}$ — матрица внутренних сил.

Физические соотношения (1.5.8) для балки принимают вид

$$\sigma = D \varepsilon, \quad (4.8.5)$$

где D — матрица жесткости для однородной по толщине балки:

$$D = \begin{bmatrix} E_x I_y & 0 \\ 0 & k G_{xz} F \end{bmatrix} \quad (4.8.6)$$

Здесь E_x — модуль упругости в продольном направлении балки; G_{xz} — модуль поперечного сдвига; I_y — момент инерции балки относительно оси y ; F — площадь поперечного сечения; k — коэффициент поперечного сдвига. Для прямоугольного поперечного сечения шириной b и высотой h эти величины определяются в виде $I_y = bh^3/12$; $F = bh$; $k = 5/6$. Для многослойной балки соответствующие эффективные жесткости в матрице (4.8.6) могут быть вычислены по формулам (1.5.7).

Рассмотрим конечный элемент балки Тимошенко (рис. 4.30), в локальной системе координат ξ . Соотношения между координатами x и ξ следующие:

$$\begin{aligned} x &= \frac{l}{2}(1 + \xi); & dx &= \frac{l}{2} d\xi; \\ J &= \frac{dx}{d\xi} = \frac{l}{2}; & J^{-1} &= \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{l}. \end{aligned} \quad (4.8.7)$$

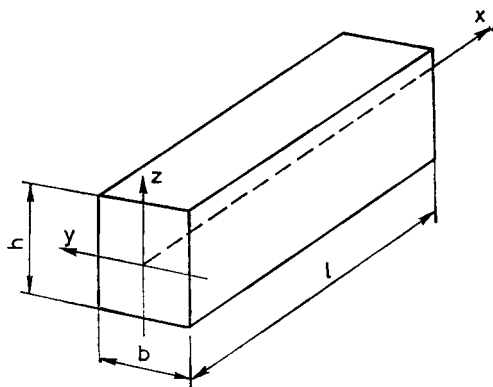


Рис. 4.29. Конечный элемент балки

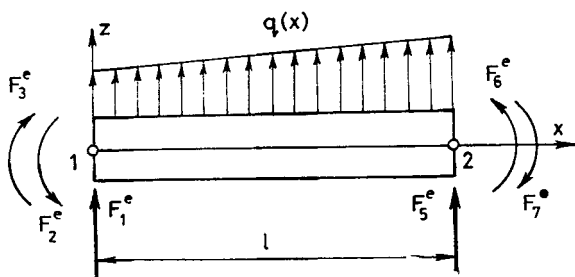


Рис. 4.30. Узловые силы конечного элемента балки

Принимаем в качестве узловых неизвестных конечного элемента прогиб w , угол поворота γ_x и первые производные этих функций:

$$d_e^T = \left\{ w_1, \left(\frac{dw}{dx} \right)_1, \gamma_x^1, \left(\frac{d\gamma_x}{dx} \right)_1, w_2, \left(\frac{dw}{dx} \right)_2, \gamma_x^2, \left(\frac{d\gamma_x}{dx} \right)_2 \right\}. \quad (4.8.8)$$

Проводя аппроксимацию искомых функций w и γ в пределах элемента кубическими полиномами, получаем такое же, как для круглой пластины (4.7.8), представление перемещений

$$u = Nd_e, \quad (4.8.9)$$

где матрица N определена по формуле (4.7.10). При этом якобиан преобразования координат $J = l/2$. Подставляя (4.8.9) в (4.8.2), получаем кинематические соотношения для конечного элемента

$$\varepsilon = Bd_e. \quad (4.8.10)$$

Здесь с учетом (4.8.3) матрица B имеет следующие ненулевые компоненты:

$$\begin{aligned} B_{13} &= \frac{2}{l} \frac{dN_1}{d\xi}; & B_{14} &= \frac{dN_1^*}{d\xi}; & B_{17} &= \frac{2}{l} \frac{dN_2}{d\xi}; \\ B_{18} &= \frac{dN_2^*}{d\xi}; & B_{21} &= \frac{2}{l} \frac{dN_1}{d\xi}; & B_{22} &= \frac{dN_1^*}{d\xi}; & B_{23} &= N_1; \\ B_{24} &= \frac{l}{2} N_1^*; & B_{25} &= \frac{2}{l} \frac{dN_2}{d\xi}; & B_{26} &= \frac{dN_2^*}{d\xi}; \\ B_{27} &= N_2; & B_{28} &= \frac{l}{2} N_2^*. \end{aligned} \quad (4.8.11)$$

Функции формы конечного элемента N_i , N_i^* определяются по формулам (4.2.5). Подставляя (4.8.5) и (4.8.10) в функционал (4.8.4), получаем квадратичную форму

$$U^e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e,$$

где $\mathbf{K}_e$ — матрица жесткости конечного элемента балки Тимошенко:

$$\mathbf{K}_e = \int_{-1}^1 \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \frac{l}{2} d\xi. \quad (4.8.12)$$

Элементы матрицы жесткости легко определяются аналитическим интегрированием функции (4.8.12). Ненулевые компоненты этой симметричной матрицы имеют следующий вид:

$$K_{11}^e = -K_{15}^e = K_{55}^e = \frac{6}{5} \frac{f}{l};$$

$$K_{12}^e = K_{16}^e = -K_{25}^e = -K_{56}^e = \frac{1}{10} f;$$

$$K_{13}^e = K_{17}^e = -K_{35}^e = -K_{57}^e = \frac{1}{2} f;$$

$$K_{23}^e = K_{45}^e = -K_{14}^e = K_{18}^e = -K_{27}^e = -K_{36}^e = -K_{58}^e = K_{67}^e = \frac{1}{10} fl;$$

$$K_{22}^e = K_{66}^e = \frac{2}{15} fl; \quad K_{26}^e = -\frac{1}{30} fl; \quad K_{28}^e = -K_{46}^e = \frac{1}{60} fl^2;$$

$$K_{33}^e = K_{77}^e = \frac{6}{5l} i + \frac{13}{35} fl; \quad K_{34}^e = \frac{1}{10} i + \frac{11}{210} fl^2;$$

$$K_{37}^e = -\frac{6}{5l} i + \frac{9}{70} fl; \quad K_{38}^e = \frac{1}{10} i - \frac{13}{420} fl^2;$$

$$K_{44}^e = K_{88}^e = \frac{2}{15} il + \frac{1}{105} fl^3; \quad K_{47}^e = -\frac{1}{10} i + \frac{13}{420} fl^2;$$

$$K_{48}^e = -\frac{1}{30} il - \frac{1}{140} fl^3; \quad K_{78}^e = -\frac{1}{10} i - \frac{11}{210} fl^3.$$

Здесь введены следующие обозначения: $i = E_x I_y$; $f = k G_{xz} F$.

Матрицу геометрической жесткости балки Тимошенко получаем, подставляя аппроксимацию (4.8.9) в функционал (3.4.21).

После аналитического интегрирования получаем следующие ненулевые компоненты симметричной матрицы геометрической жесткости, которые имеют общий множитель $(-P)$:

$$G_{11}^e = G_{55}^e = -G_{15}^e = \frac{6}{5l}; \quad G_{22}^e = G_{66}^e = \frac{2}{15} l;$$

$$G_{12}^e = G_{16}^e = -G_{25}^e = -G_{56}^e = \frac{1}{10}; \quad G_{26}^e = -\frac{1}{30}.$$

Матрицу масс получаем из функционала кинетической энергии (1.7.6), который для балки Тимошенко с независимой от поперечной координате плотностью ρ имеет вид

$$T = \frac{1}{2} \rho F \int_0^l (\dot{w})^2 dx + \frac{1}{2} \rho I_y \int_0^l (\dot{\gamma}_x)^2 dx. \quad (4.8.13)$$

Используя в этом функционале аппроксимацию для перемещений (4.8.9), получаем согласованную матрицу масс. Ненулевые компоненты этой матрицы имеют следующий вид:

$$M_{11}^e = M_{55}^e = \frac{13}{35} ml; \quad M_{22}^e = M_{66}^e = \frac{1}{105} ml^3;$$

$$M_{33}^e = M_{77}^e = \frac{13}{35} jl; \quad M_{44}^e = M_{88}^e = \frac{1}{105} jl^3;$$

$$M_{12}^e = -M_{56}^e = \frac{11}{210} ml^2; \quad M_{34}^e = -M_{78}^e = \frac{11}{210} jl^2;$$

$$M_{15}^e = \frac{9}{70} ml; \quad M_{16}^e = -\frac{13}{420} ml^2; \quad M_{25}^e = \frac{13}{420} ml^2;$$

$$M_{26}^e = -\frac{1}{140} ml^3; \quad M_{37}^e = \frac{9}{70} jl; \quad M_{48}^e = -\frac{1}{140} jl^3;$$

$$M_{47}^e = -M_{38}^e = \frac{13}{420} jl^2.$$

Здесь введены обозначения $m = \rho F$ и $j = \rho I_y$. Приведенная матрица масс является согласованной с полем перемещений и, кроме того, учитывает инерцию вращения. Рассматриваемый конечный элемент обозначим через *SI3W8* (элемент балки третьего порядка с восемью степенями свободы по перемещениям).

4.8.2. Частоты собственных колебаний

Рассмотрим задачу определения спектра частот колебаний балки Тимошенко с граничными условиями шарнирного опирания

$$\omega = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, L.$$

Эта задача имеет аналитическое решение, поэтому она может служить в качестве тестовой для исследования сходимости. Рассмотрим балку прямоугольного поперечного сечения со следующими характеристиками: $E_x = 0,6 \cdot 10^5$ МПа; $G_{xz} = 0,241 \times 10^5$ МПа; $k = 5/6$; $h = b = 0,2$ м; $L = 1,00$ м; $\rho = 10$ кг/м³.

Спектр частот определяется из частотного уравнения (4.6.4). Рассматриваются симметричные относительно середины балки формы колебаний, поэтому разбивка на конечные элементы проводится на полудлине балки с заданием условия симметрии $\gamma_x = 0$ при $x = L/2$. В табл. 4.7 приведены значения пяти первых частот $\lambda = \omega/10^3$ с симметричными относительно середины балки формами колебаний в зависимости от числа конечных элементов N на всей длине балки. Сравниваются частоты, определенные аналитически [16, 126], частоты, определенные с использованием конечного элемента из работы [9], и частоты, определенные с использованием конечного элемента $S13W8$. Отметим, что матрица жесткости конечного элемента, рассмотренного в работе [9], будет получена в параграфе 7.2 на основе смешанного функционала и гибридной схемы метода конечных элементов. Этот конечный элемент обозначен через $S1W4\sigma 2$. В третьем столбце табл. 4.7 приведено отношение частот, определенных по теории типа Тимошенко, ω_T и частот, определенных по классической теории, ω_K . Видно, что классическая теория дает значительно большие значения частот,

Таблица 4.7

Спектр частот шарнирно опертой балки Тимошенко

Число волн по длине балки m	Аналитическое решение ω_T	ω_T/ω_K	$S1W4\sigma 2$			$S13W8$		
			$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=6$	$N=10$	$N=20$
			$r=10$	$r=20$	$r=40$	$r=12$	$r=20$	$r=40$
1	4,15532	0,9415	4,138	4,150	4,153	4,155	4,155	4,155
3	27,7344	0,6982	28,07	27,80	27,75	27,74	27,73	27,73
5	57,1008	0,5175	60,73	57,95	57,31	57,24	57,11	57,10
1*	82,5342	—	86,47	83,55	82,78	82,53	82,53	82,53
7	87,1399	0,4029	99,85	90,35	87,96	88,14	87,21	87,14

* Частота, обусловленная сдвигом нормали.

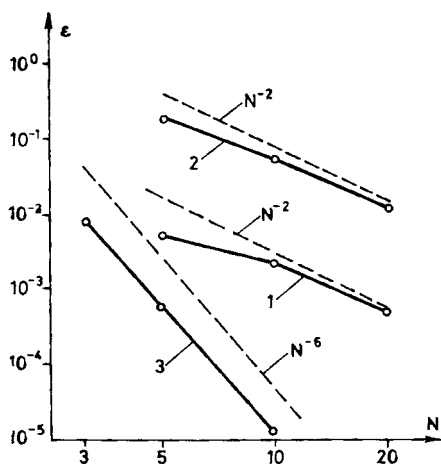


Рис. 4.31. Сходимость решения при определении собственных частот балки Тимошенко:

1 — $SIW4\sigma2$ при $m=1$; 2 — $SIW4\sigma2$ при $m=7$; 3 — $SI3W8$ при $m=7$

особенно высших. Графики сходимости для частот при $m=1$ и $m=7$ в логарифмическом масштабе показаны на рис. 4.31. Сравниваются конечные элементы $SIW4\sigma2$ [9] и $SI3W8$. Из табл. 4.7 и рис. 4.31 видно, что скорость сходимости для конечного элемента $SI3W8$ значительно выше и пропорциональна N^{-6} , а для конечного элемента $SIW4\sigma2$ уменьшение погрешности пропорционально N^{-2} . При одинаковом числе неизвестных (r — число степеней свободы) точность определения частот с применением конечного элемента $SI3W8$ выше, чем с применением элемента $SIW4\sigma2$. Практическая сходимость решения для конечного элемента $SI3W8$ соответствует теоретической, так как минимальное собственное значение уравнения (4.6.4) определяется с погрешностью энергии деформаций. Энергия деформаций с применением конечного элемента третьего порядка для функционала, который содержит первую производную от искомой функции, определяется с погрешностью N^{-6} (см. приложение 3). Ряд задач динамической устойчивости балок на упругом основании с применением конечного элемента $SI3W8$ рассмотрен в работе [78].

4.8.3. Нестационарное динамическое деформирование

Преимущество теории типа Тимошенко перед классической теорией особенно проявляется при решении задач динамики. Рассмотрим решение задачи нестационарного деформирования балки при поперечном ударе. В середине балки приложена динамическая сила $P(t)$ в виде кратковременного импульса

(рис. 4.32). Форма и величина импульса зависят от геометрии балки и механических свойств материала. В работе [61] экспериментально исследовалось ударное нагружение балок из гибридных композитов стеклопластик—углепластик. При этом экспериментально были измерены форма и величина импульса для композитов различных схем армирования. Типичный график импульса силы показан на рис. 4.33.

В данной задаче необходимо учитывать вязкоупругие свойства материала и вместо закона Гука использовать модель Фойгта

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} e_{kl} + C^{ijkl} \frac{de_{kl}}{dt}. \quad (4.8.14)$$

Здесь C^{ijkl} — компоненты тензора вязкости. Так как материал обладает вязкоупругими свойствами, уравнение движения балки получаем, используя обобщение принципа Гамильтона для сред с диссипацией энергии.

Уравнение Лагранжа (1.9.9) с учетом рассеяния энергии для конечноэлементной системы при этом имеет вид [71]

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{d}^T} \right) - \frac{\partial T}{\partial d^T} + \frac{\partial U}{\partial d^T} + \frac{\partial \Phi_R}{\partial \dot{d}^T} = F(t). \quad (4.8.15)$$

Здесь T , U — кинетическая энергия и энергия деформации соответственно; Φ_R — диссипативная функция Рэлея. При физическом законе вязкоупругости (4.8.14) диссипативная функция Рэлея является квадратичной формой от скорости $\dot{d}$:

$$\Phi_R = \frac{1}{2} \dot{d}^T C \dot{d}, \quad (4.8.16)$$

где C — матрица демпфирования, или матрица вязкости.

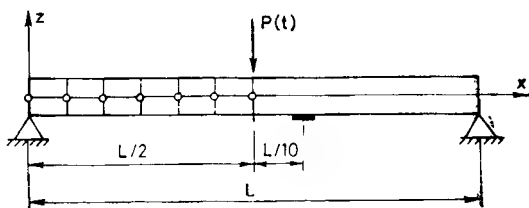


Рис. 4.32. Балка при поперечном ударе

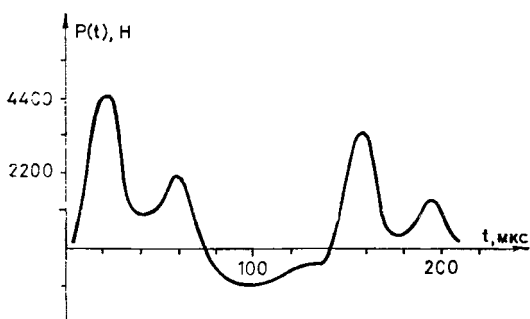


Рис. 4.33. Форма импульса ударной силы для шарнирно опертой балки типа УСУ при массе ударника $m=51 \cdot 10^{-3}$ кг и скорости $v=5$ м/с

Уравнение движения балки при ее конечноэлементной аппроксимации согласно (4.8.15) имеет вид

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{d}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{d}} + \mathbf{K}\mathbf{d} = \mathbf{F}(t). \quad (4.8.17)$$

Здесь $\mathbf{C} = \sum_e \mathbf{C}_e$ — матрица вязкости для всей конструкции, получаемая суммированием матриц вязкости $\mathbf{C}_e$ для одного конечного элемента. Матрица вязкости (демпфирования) конечного элемента $\mathbf{C}_e$ определяется из матрицы жесткости заменой в ней упругих модулей на вязкие модули C_{ijkl} [61]. Модули вязкости устанавливаются экспериментально путем замера логарифмического декремента затухания.

В случае центрального поперечного удара ввиду симметрии можно рассматривать половину пролета балки с условиями симметрии $\gamma_x = 0$ при $x = L/2$. При этом к центральному узлу прикладывается ударная сила $P(t)/2$. Рассматривались граничные условия шарнирного опирания ($\omega = 0$ при $x = 0, L$) и жесткого защемления ($\omega = 0$; $\gamma_x = 0$ при $x = 0, L$). При этом начальные условия в любой узловой точке балки были следующими: $\mathbf{d}|_{t=0} = 0$; $\dot{\mathbf{d}}|_{t=0} = 0$.

Уравнение (4.8.17) интегрировалось численно, при этом функция силы удара $P(t)$ аппроксимировалась по времени кубическими сплайнами и вводилась в схему интегрирования. Рассматривались балки прямоугольного поперечного сечения с размерами $L = 0,25$ м, $b = h = 0,01$ м. Балки были изготовлены из стеклопластика (С), углепластика (У), двухслойные гибриды — из стеклопластика—углепластика (СУ), трехслойные гибриды — из стеклопластика—углепластика—стеклопластика (СУС) и углепластика—стеклопластика—углепластика (УСУ). В каждом квазиоднородном слое содержалось множество монослоев под углами 0 , ± 45 и 90° (углы отсчитывались от оси x балки). Процентное содержание армирующих волокон для всех

вариантов составляло примерно 65%. В табл. 4.8 сведены механические характеристики исследуемой группы гибридных композитных материалов.

Распространение изгибного импульса деформаций на крайних волокнах на расстоянии $x=L/10$ от места удара показано на рис. 4.34. При этом масса ударника $m=51 \cdot 10^{-3}$ кг, скорость соударения $v=5$ м/с. Последовательное увеличение развертки во времени от $t=10$ мкс/деление до $t=100$ мкс/деление позволяет проследить распространение прямого и отраженного импульсов. Видно, что максимальные деформации в рассматриваемом сечении возникают в момент времени $t \approx 23$ мкс после начала удара (рис. 4.34,а), а отраженный от опоры импульс достигает своего экстремального значения вторично в данном сечении при $t \approx 150$ мкс (рис. 4.34,б). Далее происходит суперпозиция волн с отраженных от противоположных концов балки импульсов (рис. 4.34,в). Теоретический расчет (штриховые линии) по уравнению (4.8.17) правильно предсказывает время прихода и величину импульса деформации. Максимальные отклонения по деформациям не превышают 15%. Хорошее совпадение теории и эксперимента можно объяснить тем, что сила удара $P(t)$ определялась из эксперимента [61]. Она зависит не только от массы, скорости и формы ударяемого тела, но и от геометрических и механических характеристик балки, т. е.

Таблица 4.8

Основные структурные параметры и упругие характеристики гибридных композитных материалов

Материал	Относительный объем, %		Плотность, кг/м ³	Углы армирования, °	E , 10^9 Па	G_{12} , 10^9 Па
	С	У				
С	100	—	1830	0,90 $0 \pm 45,90$	258 217	2,08 1,88
У	—	100	1450	0,90 $0 \pm 45,90$ ± 45	750 504 159	15,70 13,50 4,20
СУ	50	50	1640	$0 \pm 45,90$	403	7,25
СУС	33,3	—	1700	$0 \pm 45,90$	343	5,88
	—	33,3				
	33,3	—				
УСУ	—	33,3	1580	$0 \pm 45,90$	445	9,98
	33,3	—				
	—	33,3				

Примечание. Углы армирования одинаковы для всех слоев, составляющих гибридный композит. Содержание матрицы для всех вариантов приближается к 35%.

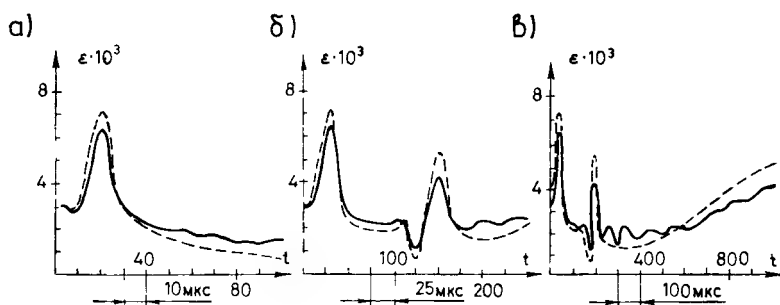


Рис. 4.34. Распространение изгибного импульса деформаций в сечении $L/10$ от места удара для шарнирно опертой балки типа УСУ:

— эксперимент [61]; — — — — — расчет по уравнению (4.8.17).
Пояснения см. в тексте

от реакции балки. Например, максимальная сила удара для одинаковых двухслойных балок стеклопластик—углепластик снижается примерно на 15%, если удар произведен со стороны стеклопластика, который обладает большими демпфирующими свойствами, чем углепластик. Теоретически функцию силы удара можно определить, лишь решая трехмерную динамическую контактную задачу.

АППРОКСИМАЦИЯ ДВУМЕРНЫМИ КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ В МЕТОДЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ

5.1. ВВЕДЕНИЕ

Как уже отмечалось в главе 1, главным преимуществом теории оболочек типа Тимошенко перед классической теорией является то, что минимизируемые функционалы содержат лишь первые производные от перемещений. Это позволяет легко построить согласованные конечные элементы в двумерном случае.

Несмотря на недостатки классической теории большинство двумерных конечных элементов для расчета пластин и оболочек построено на базе этой теории [17, 20, 26, 30, 82, 92, 93, 97, 107, 110, 134, 163, 170 и др.]. При этом в большинстве случаев рассматриваются конечные элементы для пластин, плоских оболочек или оболочек цилиндрической формы. К этому направлению примыкают также исследования, основанные на дискретной гипотезе Кирхгофа—Лява для конечного элемента [83, 170 и др.]. Конечные элементы, в которых гипотеза Кирхгофа—Лява выполняется в отдельных узловых точках, можно получить либо из трехмерных соотношений, либо из теории оболочек, учитывающей поперечные сдвиги.

Среди конечных элементов, построенных на базе классической теории, имеются как согласованные, так и несогласованные. Несогласованные конечные элементы весьма удачно применяются в линейном анализе. Однако применение несогласованных элементов является проблематичным в нелинейном анализе и при решении задач деформирования сложных тонкостенных систем, где трудно исследовать сходимость решения. Согласованные конечные элементы классической теории оболочек построены на неполных полиномах высоких степеней, поэтому к ним нельзя применять изопараметрическую технику. Тем не менее конечные элементы, построенные на соотношениях классической теории оболочек, нашли широкое применение в практических расчетах. В настоящее время они составляют основу библиотеки конечных элементов комплексов программ для анализа тонкостенных систем.

Конечноэлементные двумерные аппроксимации на основе теории типа Тимошенко (Рейснера или Миндлина) сначала

были построены для пластин. Были рассмотрены прямоугольные конечные элементы с билинейной аппроксимацией перемещений [106], а также с квадратичной и кубической аппроксимацией перемещений [104].

Разрабатывались также прямоугольные многослойные конечные элементы, в которых необходимо совместное рассмотрение изгибных и мембранных деформаций. Например, были рассмотрены прямоугольный конечный элемент, в котором углы поворота и мембранные перемещения имеют билинейную аппроксимацию, а функция прогиба — кубическую [140], а также аналогичная аппроксимация для однослойного прямоугольного элемента пластины [100]. Были построены треугольные конечные элементы пластин Тимошенко с линейной аппроксимацией прогиба и углов поворота [50, 84]. Возможны также построения конечных элементов на основе теории типа Тимошенко более высокого порядка [146], в которой мембранные перемещения имеют кубическое распределение по толщине пластин, а нормальные перемещения — квадратичное распределение по толщине. В этом случае вместо трех независимых функций (прогиба и двух углов поворота) в теории пластин типа Тимошенко первого порядка поле перемещений и деформаций характеризуют шесть независимых функций. На базе теории пластин [146] был построен прямоугольный конечный элемент второго порядка с девятью узлами и шестью степенями свободы в узле [112]. Для конечных элементов в теории пластин типа Тимошенко обычно используются три степени свободы в узле (прогиб и два угла поворота). На основе теории, учитывающей эффекты более высокого порядка, был построен конечный элемент полой оболочки [57].

Результаты, аналогичные полученным на основе теории Тимошенко первого порядка, получаются, если двумерные конечные элементы построить из трехмерных, задавая в местах стыковки конечных элементов независимые от перемещений срединной поверхности вращения узлов на верхней и нижней поверхности. Этот подход можно назвать дискретной гипотезой типа Тимошенко. Он был использован для построения конечных элементов, учитывающих поперечные сдвиги [79, 95 и др.]. Согласованность полей перемещений позволяет для преобразования этих конечных элементов применять изопараметрическую технику и решать различные задачи деформирования оболочек произвольных форм. Особенно широко редуцирование трехмерных элементов к двумерным применялось в нелинейных задачах деформирования оболочек [90, 95, 105 и др.].

Двумерные конечные элементы оболочек строились также на базе теории типа Тимошенко. Были предложены треугольные изопараметрические конечные элементы второго и третьего по-

рядка [63, 64, 65]. Эти конечные элементы учитывают кроме деформаций поперечных сдвигов также деформации обжатия нормали. В данном случае в узле элемента имеется шесть степеней свободы. Вариант конечного элемента с пятью степенями свободы в узле учитывает только деформации поперечных сдвигов. Был предложен аналогичный двумерный конечный элемент второго порядка, для которого матрицы жесткости получены с применением естественного подхода [119—121].

Все перечисленные конечные элементы, основанные на независимых аппроксимациях полей перемещений и поворотов, являются согласованными, поэтому для их преобразования может быть применена изопараметрическая техника. Они успешно могут применяться также в нелинейном анализе оболочек. Однако техника применения этих элементов для расчета прочности толстостенных и тонкостенных оболочек несколько различается. При расчете прочности толстостенных оболочек из изотропного материала или оболочек средней толщины из анизотропного материала со слабой сдвиговой жесткостью техника интегрирования при получении матриц жесткости не отличается от обычной. Все слагаемые функционала энергии деформации (мембранные, изгибные и сдвиговые составляющие) интегрируются по схемам одного порядка. В случае тонкостенных оболочек из изотропного материала такое полное интегрирование приводит к завышению жесткости конструкции и результаты решения расходятся [104, 175]. На примере конечного элемента балки Тимошенко путем аналитических выкладок показано, что полное интегрирование приводит к матрице жесткости, которая в пределе для тонкостенной конструкции дает неверные результаты [106]. В то же время если энергия деформаций сдвига интегрируется со схемой пониженного порядка, то в пределе тонкостенной конструкции получается правильный результат. Таким образом, для тонкостенных конструкций следует применять либо выборочную схему интегрирования (энергия деформаций сдвига интегрируется с пониженным порядком), либо сокращенную схему интегрирования [175], когда вся матрица жесткости интегрируется со схемой пониженного порядка. Этот технический прием позволяет избежать трудностей при расчете тонкостенных конструкций с использованием конечных элементов, учитывающих деформации поперечного сдвига.

При расчете изотропных тонкостенных конструкций на основе сдвиговых элементов можно использовать также следующий прием. Поскольку для тонкостенных конструкций влияние поперечного сдвига незначительно, при расчете используются заниженные значения модулей поперечного сдвига. Полученное таким образом решение близко к решению на основе классической теории, и при этом не появляется эффект искусственного

увеличения жесткости конструкции. Таким образом, конечные элементы, построенные на независимых аппроксимациях полей перемещений и углов поворота, при использовании техники выборочно сокращенного интегрирования успешно могут применяться при решении различных задач деформирования толсто-стенных и тонкостенных оболочек и пластин.

5.2. ИЗОПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ОБОЛОЧЕК

В технике (машиностроении, строительстве, авиастроении, судостроении) применяются оболочки самых разнообразных форм (рис. 5.1). Разнообразные внешние нагрузки на оболочку создают деформированное состояние, зависящее от координат поверхности x^1, x^2 . Наиболее универсальной формой конечного элемента является искривленный треугольник. Оболочку с отверстиями и границами любой формы можно разбить на треугольные конечные элементы. С применением изопараметрической техники [26] геометрию искривленного конечного элемента можно задавать в любой криволинейной системе координат x^α, x_3 .

Рассмотрим изопараметрические треугольные конечные элементы второго (CAU2W36) и третьего (CAU3W60) порядков (рис. 5.2). Элемент второго порядка имеет шесть узлов, элемент третьего порядка — 10 узлов (один из этих узлов является внутренним). Конечные элементы первого порядка не могут применяться в изопараметрической технике для описания гладких искривленных поверхностей. Конечные элементы четвертого, пятого и более высоких порядков нецелесообразно применять в связи с многочисленностью узлов, многие из которых являются внутренними. Практика показала, что наиболее экономичными являются элементы второго и третьего порядков.

Различные части разветвленных и ребристых оболочек могут иметь разные геометрические формы срединной поверхности.

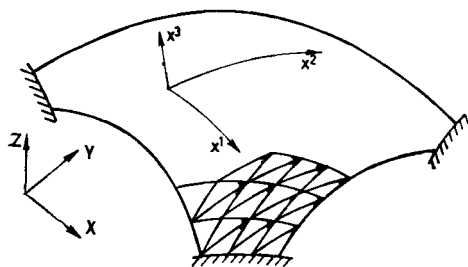


Рис. 5.1. Разбивка произвольной оболочки на треугольные конечные элементы

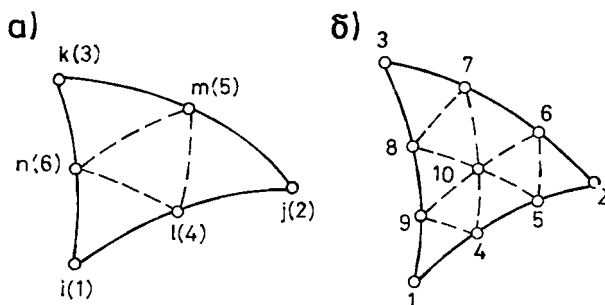


Рис. 5.2. Изопараметрические треугольные конечные элементы второго (а) и третьего (б) порядка

В связи с этим основные соотношения теории оболочек для каждой части оболочки записываются в своей криволинейной системе координат x^α, x_3 . Каждая координатная система x^α, x_3 порождает свой ансамбль конечных элементов. Для объединения конечных элементов всех ансамблей используется глобальная декартова система координат X, Y, Z . Для записи локальной аппроксимации полей перемещений и геометрии оболочки внутри каждого конечного элемента используется локальная система треугольных (барицентрических) координат L_1, L_2, L_3 [26] (рис. 5.3). Для произвольной точки P в треугольнике L -координаты определяются через отношения площадей [26]:

$$L_1 = \frac{\Delta_{P23}}{\Delta_{123}}; \quad L_2 = \frac{\Delta_{P13}}{\Delta_{123}}; \quad L_3 = \frac{\Delta_{P12}}{\Delta_{123}}; \\ L_1 + L_2 + L_3 = 1. \quad (5.2.1)$$

В L -координатах удобно записывать локальные аппроксимации и проводить численное интегрирование.

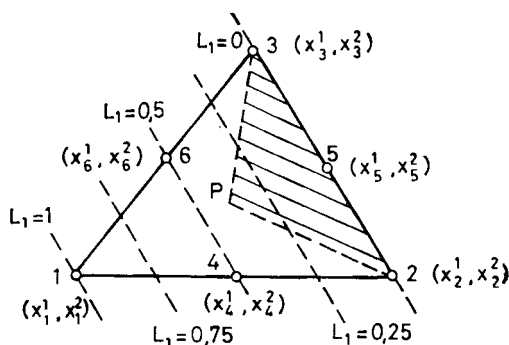


Рис. 5.3. Локальная треугольная система координат

Таким образом, для описания деформирования произвольных разветвленных оболочек необходимо выделить три уровня координатных систем:

- 1) глобальная декартова система координат X, Y, Z ;
- 2) система криволинейных координат x^α, x_β ;
- 3) локальная система треугольных L -координат.

При рассмотрении деформирования гладкой оболочки регулярной формы в качестве глобальной координатной системы используется система криволинейных координат x^α, x_β , а глобальная декартова система координат может не использоваться.

Вектор перемещений (1.3.27) в теории типа Тимошенко имеет шесть компонент:

$$\mathbf{u}^T = \{v_{(1)}, v_{(2)}, \omega, \gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma\}. \quad (5.2.2)$$

Эти перемещения внутри каждого конечного элемента аппроксимируются квадратичными или кубическими полными полиномами:

$$\mathbf{u} = [N_1 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, \dots, N_n \mathbf{I}] \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e. \quad (5.2.3)$$

$6 \times 6n \quad 6n \times 1$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером 6×6 ; $\mathbf{d}_e$ — вектор узловых перемещений:

$$\mathbf{d}_e^T = \{\mathbf{d}_1^e, \mathbf{d}_2^e, \dots, \mathbf{d}_n^e\};$$

$$\mathbf{d}_i^e = \{v_{(1)}^i, v_{(2)}^i, \omega_i, \gamma_{(1)}^i, \gamma_{(2)}^i, \gamma_i\}, \quad (5.2.4)$$

где $\mathbf{d}_i^e$ — перемещения i -го узла. При этом в (5.2.3) следует принять $n=6$ для элемента второго порядка и $n=10$ для элемента третьего порядка.

Функции формы конечного элемента N_i в (5.2.3) выражаются через L -координаты треугольника [26]. Для элемента второго порядка

$$\begin{aligned} N_1 &= (2L_1 - 1)L_1; & N_2 &= (2L_2 - 1)L_2; & N_3 &= (2L_3 - 1)L_3; \\ N_4 &= 4L_1L_2; & N_5 &= 4L_2L_3; & N_6 &= 4L_1L_3. \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

Для элемента третьего порядка

$$N_1 = \frac{1}{2} L_1 (3L_1 - 1) (3L_1 - 2); \quad N_4 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_1 - 1);$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_1 L_2 (3L_2 - 1); \quad N_2 = \frac{1}{2} L_2 (3L_2 - 1) (3L_2 - 2);$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_2 - 1); \quad N_7 = \frac{9}{2} L_2 L_3 (3L_3 - 1);$$

$$N_3 = \frac{1}{2} L_3 (3L_3 - 1) (3L_3 - 2); \quad N_8 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_3 - 1);$$

$$N_9 = \frac{9}{2} L_1 L_3 (3L_1 - 1); \quad N_{10} = 27 L_1 L_2 L_3. \quad (5.2.6)$$

Геометрия оболочки аппроксимируется теми же функциями формы, что и перемещения. Связь между криволинейными координатами x^1, x^2 и локальными L -координатами треугольника определяет зависимость, аналогичная зависимости для перемещений (5.2.3):

$$\begin{aligned} x^1 &= [N_1, N_2, \dots, N_n] \mathbf{x}_1; \\ x^2 &= [N_1, N_2, \dots, N_n] \mathbf{x}_2. \end{aligned} \quad (5.2.7)$$

Здесь $\mathbf{x}_\alpha^T = \{x_{(1)}^\alpha, x_{(2)}^\alpha, \dots, x_{(n)}^\alpha\}$ — матрицы ($\alpha=1, 2$), содержащие значения криволинейных координат x^α в узлах конечного элемента.

При одинаковой аппроксимации перемещений (5.2.3) и геометрии (5.2.7) конечный элемент является изопараметрическим [26].

5.2.1. Матрица жесткости

Матрицу жесткости конечного элемента получаем стандартным путем, используя кинематические соотношения (1.3.27), физические соотношения (1.5.8) и энергию деформаций (1.5.9) для конечного элемента U_e :

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} &= & \mathbf{L} & \mathbf{u} &; \\ 9 \times 1 & & 9 \times 6 & 6 \times 1 \end{matrix} \quad (5.2.8)$$

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\sigma} &= & \mathbf{D} & \boldsymbol{\varepsilon} &; \\ 9 \times 1 & & 9 \times 9 & 9 \times 1 \end{matrix} \quad (5.2.9)$$

$$U_e = \frac{1}{2} \int \int_{S_e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \sqrt{a} \, dx^1 dx^2. \quad (5.2.10)$$

Здесь S_e — площадь конечного элемента. Подставляя аппроксимацию для перемещений (5.2.3) в (5.2.8), получаем кинематические соотношения для конечного элемента:

$$\begin{matrix} \boldsymbol{\varepsilon} &= & [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \mathbf{d}_e = & \mathbf{B} & \mathbf{d}_e & . \\ 9 \times 1 & & & 9 \times 6n & 6n \times 1 \end{matrix} \quad (5.2.11)$$

Здесь $\mathbf{B}$ — матрица связи деформаций и узловых перемещений. Элементы подматриц $\mathbf{B}_i$ содержат частные производные первого порядка функций формы по координатам x^α :

$$\begin{matrix} \mathbf{B}_i &= & \mathbf{L} & N_i. \\ 9 \times 6 & & 9 \times 6 \end{matrix} \quad (5.2.12)$$

Функции формы выражены через локальные координаты, следовательно, необходимо выразить производные функции формы

по глобальным координатам через производные по локальным координатам:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial L_1} & \frac{\partial x^2}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x^1}{\partial L_2} & \frac{\partial x^2}{\partial L_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \end{Bmatrix} \quad (5.2.13)$$

Здесь $\mathbf{J}$ — якобиан преобразования координат. Обращая соотношения (5.2.13), получаем искомые зависимости:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x^1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial x^2} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \quad (5.2.14)$$

Отметим, что из трех L -координат независимыми являются только две координаты, например L_1 и L_2 . Координата L_3 по (5.2.1) выражается через независимые координаты:

$$L_3 = 1 - L_1 - L_2. \quad (5.2.15)$$

Подставляя это соотношение в функции формы (5.2.5) или (5.2.6), выражаем их через две независимые координаты N_i (L_1, L_2). При вычислении якобиана преобразования координат $\mathbf{J}$ в (5.2.13) для криволинейных координат x^α используется аппроксимация геометрии (5.2.7).

Подставляя соотношения (5.2.11) в функционал (5.2.10), получаем

$$U_e = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{K}_e \mathbf{d}_e, \quad (5.2.16)$$

$1 \times 6n \quad 6n \times 6n \quad 6n \times 1$

где $\mathbf{K}_e$ — матрица жесткости элемента:

$$\mathbf{K}_e = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} |\tilde{a}| \det \mathbf{J} | dL_2 dL_1. \quad (5.2.17)$$

Здесь n — число узлов конечного элемента. Таким образом, для конечного элемента второго порядка ($n=6$) имеем матрицу жесткости 36-го порядка. Этот конечный элемент обозначаем через CAU2W36 (CAU — оболочка; 2 — порядок аппроксимации для перемещений; W — использован метод перемещений; 36 — число степеней свободы конечного элемента). Для конечного элемента третьего порядка ($n=10$) имеем матрицу жесткости 60-го порядка. Этот конечный элемент обозначим через CAU3W60.

Элементы матрицы жесткости определяются численным интегрированием в треугольнике. Весовые коэффициенты для схем различного порядка приведены в [26, 73, 74]. Анализ выбора порядка схемы интегрирования проведен в главе 6 при рассмотрении конкретных численных примеров и в приложении 4.

5.2.2. Матрица масс

Как известно, матрицу масс можно построить либо на основе различных вариантов метода сосредоточенных масс (тогда матрица масс будет диагональной), либо методом согласования с полем перемещений. В последнем случае такую матрицу называют согласованной матрицей масс. Для корректной постановки задачи и обеспечения строгой сходимости решения необходимо пользоваться только согласованными матрицами масс [26]. Однако на практике, особенно при применении метода подконструкций, часто используются диагональные матрицы масс. Согласованную матрицу масс получаем, если в функционал кинетической энергии (1.7.6) подставляем аппроксимацию перемещений (5.2.3):

$$T_e = -\frac{1}{2} \dot{\mathbf{d}}_e^T \mathbf{M}_e \dot{\mathbf{d}}_e. \quad (5.2.18)$$

$1 \times 6n \quad 6n \times 6n \quad 6n \times 1$

Здесь $\mathbf{M}_e$ — матрица масс конечного элемента:

$$\mathbf{M}_e = \int_0^1 \int_{1-L_1}^{1-L_1} \mathbf{N}^T \mathbf{R} \mathbf{N} \sqrt{a} |\det \mathbf{J}| dL_2 dL_1. \quad (5.2.19)$$

$6n \times 6n \quad 0 \quad 0 \quad 6n \times 6 \quad 6 \times 6 \quad 6 \times 6n$

Элементы матрицы масс также определяются численным интегрированием в треугольнике. Порядок схемы интегрирования может отличаться от порядка схемы интегрирования матрицы жесткости (5.2.17).

5.2.3. Матрица геометрической жесткости

Матрицу геометрической жесткости получаем из функционала $U^{**}_{(2)}$, определяемого формулой (3.4.23). В этом функционале матрица вращений ω для произвольной оболочки определяется по соотношениям (3.3.25). Подставляя в эти соотношения аппроксимацию перемещений (5.2.3), получаем

$$\omega = \Phi \mathbf{d}_e. \quad (5.2.20)$$

$3 \times 1 \quad 3 \times 6n \quad 6n \times 1$

Здесь Φ — матрица связи вращений с узловыми перемещениями. Далее, подставляя выражение (5.2.20) в функционал (3.4.23), получаем

$$U_{(2)}^{**} = \frac{1}{2} \mathbf{d}_e^T \mathbf{G}_e \mathbf{d}_e. \quad (5.2.21)$$

$1 \times 6n \quad 6n \times 6 \quad 6n \times 1$

Здесь $\mathbf{G}_e$ — матрица геометрической жесткости конечного элемента:

$$\mathbf{G}_e = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} (\mathbf{W}_0 \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} - \mathbf{\Phi}^T \mathbf{V}_0 \mathbf{\Phi}) \sqrt{a} |\det \mathbf{J}| dL_2 dL_1. \quad (5.2.22)$$

$6n \times 6n \quad 0 \quad 0 \quad 6n \times 3 \quad 3 \times 6n$
 $6n \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 6n$

Матрица геометрической жесткости $\mathbf{G}_e$ также определяется численным интегрированием. При этом входящие в матрицу докритические напряжения определяются решением линейной задачи изгиба оболочки при единичной нагрузке.

5.2.4. Эквивалентные узловые силы

Положительные направления узловых сил конечного элемента совпадают с положительными направлениями соответствующих перемещений. Для оболочки и пластины эти направления совпадают, поэтому поперечные узловые силы и моменты для элемента пластины совпадают с соответствующими силами для конечного элемента оболочки (см. рис. 5.5). Кроме того, для элемента оболочки имеются еще мембранные силы. Положительные направления этих сил совпадают с положительными направлениями (в направлении осей x^1 и x^2) мембранных перемещений $v_{(1)}$ и $v_{(2)}$. Обобщенное перемещение γ определяет вращение вокруг нормали оболочки a_3 . Внешний момент вокруг нормали a_3 заменяется парой мембранных сил в плоскости оболочки. В этом случае можно считать, что ни одна внешняя нагрузка на оболочку не совершает работу на обобщенном перемещении γ .

Рассмотрим определение эквивалентных узловых сил от распределенной нагрузки на срединной поверхности оболочки. Работу этих сил на перемещения срединной поверхности определяет функционал (1.6.31). Подставляя в этот функционал аппроксимацию для перемещений (5.2.3), получаем

$$\mathbf{W}_q^e = \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_q^e. \quad (5.2.23)$$

$1 \times 6n \quad 6n \times 1$

Здесь F_{q^e} — эквивалентные узловые силы от распределенных нагрузок на срединной поверхности оболочки:

$$F_{q^e} = \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{N}^T \mathbf{R}^T q \sqrt{a} |\det \mathbf{J}| dL_2 dL_1. \quad (5.2.24)$$

$6n \times 1 \quad 0 \quad 0 \quad 6n \times 6 \quad 6 \times 3 \quad 3 \times 1$

Эквивалентные узловые силы определяются численным интегрированием этого выражения.

Работа сосредоточенных сил и моментов определяется выражениями (1.6.29) и (1.6.30). Эти силы в ближайшем узле прибавляются к соответствующим эквивалентным силам от распределенной нагрузки (5.2.24).

Аналогично вычисляются эквивалентные силы от контурной нагрузки F_{c^e} . Для этого используется функционал работы контурных нагрузок (1.6.23) или, в частном случае на контуре $x^1 = \text{const}$, функционал (1.6.32). Более подробное вычисление эквивалентных узловых сил от контурных нагрузок показано на примере пластины в параграфе 5.3. Суммарные узловые силы на конечный элемент F_e определяются суммой сил F_{q^e} , F_{c^e} и внешних сосредоточенных сил. Суммарную работу внешних сил можно записать в виде

$$W_e = \mathbf{d}_e^T F_e. \quad (5.2.25)$$

$1 \times 6n \quad 6n \times 1$

5.3. ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ИЗГИБА ПЛАСТИН

Рассмотрим изгиб пластины в декартовых координатах $x^1 = x$; $x^2 = y$; $x^3 = z$ (рис. 5.4). В принципе в декартовых координатах можно рассматривать задачи изгиба любых пластин. Однако пластины некоторых форм (круглые, эллиптические и др.) удобнее рассматривать в специальных координатных системах.

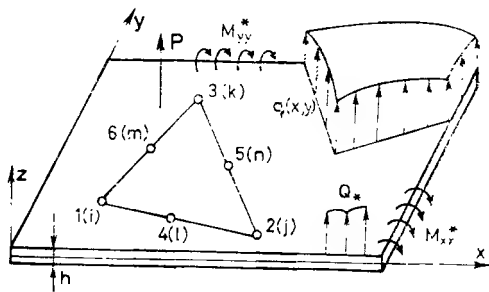


Рис. 5.4. Разбивка пластины на треугольные конечные элементы

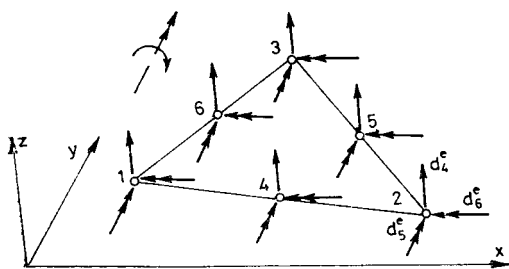


Рис. 5.5. Положительные направления узловых перемещений и сил для конечного элемента изгибаемой пластины

При изгибе однородных по толщине пластин три из шести функций перемещений в линейной теории типа Тимошенко равны нулю ($v_{(1)}=v_{(2)}=\gamma=0$). Остальные три функции (прогиб w , углы поворота γ_x и γ_y) полностью характеризуют напряженно-деформированное состояние пластины.

При решении задач изгиба неоднородных по толщине пластин, например слоистых пластин с мембранно-изгибным взаимодействием, отличными от нуля будут также перемещения в плоскости $v_{(1)}=u$ и $v_{(2)}=v$. Если рассматривается деформирование пластинчатых систем, то отличным от нуля кроме перемещений в плоскости будет обобщенное перемещение γ . В задачах устойчивости пластин при докритическом деформировании мембранные перемещения также будут отличными от нуля. Во всех этих случаях число степеней свободы в узле конечного элемента будет равно шести (или пяти), как для оболочек. Поэтому для решения упомянутых задач используется плоский аналог (рис. 5.5) конечного элемента, рассмотренного в параграфе 5.2.

5.3.1. Матрица жесткости

Функционал энергии деформаций (1.10.2), описывающий деформирование однородной по толщине пластины, принимает вид

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{S_e} \{M_{xx}\chi_{xx} + M_{yy}\chi_{yy} + 2M_{xy}\chi_{xy} + 2Q_x\Omega_{x3} + 2Q_y\Omega_{y3}\} dS = \frac{1}{2} \iint_{S_e} \sigma^T \epsilon dS. \quad (5.3.1)$$

$1 \times 5 \times 1$

Здесь σ и ϵ — матрицы внутренних сил и деформаций:

$$\sigma^T = \{M_{xx}, M_{yy}, M_{xy}, Q_x, Q_y\}; \quad (5.3.2)$$

$$\epsilon^T = \{\chi_{xx}, \chi_{yy}, 2\chi_{xy}, 2\Omega_{x3}, 2\Omega_{y3}\}. \quad (5.3.3)$$

Деформации через перемещения выражаются по кинематическим соотношениям (1.3.24), которые в матричной записи имеют вид

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u} . \quad (5.3.4)$$

$5 \times 1 \quad 5 \times 3 \quad 3 \times 1$

Здесь $\mathbf{u}^T = \{w, \gamma_x, \gamma_y\}$ — матрица перемещений; $\mathbf{L}$ — матрица операторов дифференцирования:

$$\mathbf{L}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

3×5

Физические соотношения (1.5.8) для однородной по толщине пластины принимают вид

$$\sigma = \mathbf{D} \varepsilon . \quad (5.3.6)$$

Здесь $\mathbf{D}$ — матрица жесткости пластины для ортотропного материала:

$$\mathbf{D} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{\nu_{21}E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu_{12}E_1}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & \frac{E_2}{1 - \nu_{12}\nu_{21}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{12}{h^2} G_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12}{h^2} G_{23} \end{bmatrix}$$

где E_1, E_2 — модули упругости в направлении осей x и y соответственно; G_{12} — модуль сдвига в плоскости xy ; G_{13}, G_{23} — модули поперечного сдвига в плоскостях xz и yz соответственно; ν_{12}, ν_{21} — коэффициенты Пуассона.

Для перемещений внутри конечного элемента принимаем либо линейную аппроксимацию, либо квадратичную или кубическую:

$$\mathbf{u} = [N_1 \mathbf{I}, N_2 \mathbf{I}, \dots, N_n \mathbf{I}] \mathbf{d}_e = \mathbf{N} \mathbf{d}_e . \quad (5.3.7)$$

$3 \times 3n \quad 3n \times 1$

Здесь $\mathbf{I}$ — единичная матрица размером 3×3 ; $\mathbf{d}_e$ — матрица узловых перемещений:

$$\begin{aligned}\mathbf{d}_e^T &= \{\mathbf{d}_1^{eT}, \mathbf{d}_2^{eT}, \dots, \mathbf{d}_n^{eT}\}; \\ \mathbf{d}_i^{eT} &= \{w_i, \gamma x^i, \gamma y^i\}.\end{aligned}\quad (5.3.8)$$

В соотношениях (5.3.7) $n=3, 6, 10$ для линейной, квадратичной и кубической аппроксимаций перемещений соответственно. Функции формы для квадратичной аппроксимации определяются выражениями (5.2.5), для кубической — выражениями (5.2.6), а для линейной аппроксимации функциями формы являются L -координаты треугольника:

$$N_1 = L_1; \quad N_2 = L_2; \quad N_3 = L_3. \quad (5.3.9)$$

Соотношения между L -координатами треугольника и декартовыми координатами x, y (см. рис. 5.4) можно записать в виде

$$\begin{aligned}x &= L_1 x_i + L_2 x_j + L_3 x_k; \\ y &= L_1 y_i + L_2 y_j + L_3 y_k,\end{aligned}\quad (5.3.10)$$

где (x_i, y_i) ; (x_j, y_j) и (x_k, y_k) — декартовы координаты узлов i, j, k соответственно. Исключая из (5.3.10) по соотношению (5.2.15) координату L_3 , получаем

$$\begin{aligned}x &= L_1(x_i - x_k) + L_2(x_j - x_k) + x_k; \\ y &= L_1(y_i - y_k) + L_2(y_j - y_k) + y_k.\end{aligned}\quad (5.3.11)$$

Якобиан (5.2.13) преобразования декартовых координат в L -координаты определяется постоянной матрицей

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial L_1} & \frac{\partial y}{\partial L_1} \\ \frac{\partial x}{\partial L_2} & \frac{\partial y}{\partial L_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_j & -b_j \\ -c_i & b_i \end{bmatrix} \quad (5.3.12)$$

Здесь введены следующие обозначения: $b_i = y_j - y_k$; $b_j = y_k - y_i$; $c_i = x_k - x_j$; $c_j = x_i - x_k$. Детерминант якобиана (5.3.12) равен удвоенной площади треугольника (i, j, k) :

$$\det(\mathbf{J}) = c_j b_i - b_j c_i = 2\Delta. \quad (5.3.13)$$

Обращенная матрица Якоби с учетом (5.3.12) и (5.3.13) имеет вид

$$\mathbf{J}^{-1} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j \\ c_i & c_j \end{bmatrix} \quad (5.3.14)$$

Эта матрица используется в аналогичных формулам (5.2.14) соотношениях для преобразования производных функций формы:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial L_1} \\ \frac{\partial N_i}{\partial L_2} \end{Bmatrix} \quad (5.3.15)$$

Подставляя аппроксимацию (5.3.7) в кинематические соотношения (5.3.4), получаем

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \dots, \mathbf{B}_n] \mathbf{d}_e = \mathbf{B} \mathbf{d}_e. \quad (5.3.16)$$

$5 \times 3n \quad 3n \times 1$

Здесь элементы подматриц $\mathbf{B}_i$ содержат частные производные первого порядка функций формы по координатам x, y :

$$\mathbf{B}_i = \mathbf{L} \mathbf{N}_i. \quad (5.3.17)$$

$5 \times 3 \quad 5 \times 3$

Подставляя (5.3.6) и (5.3.16) в функционал (5.3.1), стандартным образом получаем матрицу жесткости конечного элемента изгибаемой пластины

$$\mathbf{K}_e = \int_0^1 \int_{1-L_1}^{1-L_2} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \, 2\Delta dL_2 dL_1. \quad (5.3.18)$$

$3n \times 3n \quad 0 \quad 0 \quad 3n \times 5 \quad 5 \times 5 \quad 5 \times 3n$

Здесь n — число узлов конечного элемента. Таким образом, для конечного элемента первого порядка ($n=3$) имеем матрицу жесткости 9-го порядка. Этот конечный элемент обозначаем через $PL1W9$ (PL — пластина; 1 — порядок аппроксимации для перемещений; W — использован метод перемещений; 9 — число степеней свободы конечного элемента). Для конечного элемента второго порядка ($n=6$) имеем матрицу жесткости 18-го порядка, этот конечный элемент обозначаем через $PL2W18$. Для конечного элемента третьего порядка ($n=10$) имеем матрицу жесткости 30-го порядка. Этот элемент обозначаем через $PL3W30$. На рис. 5.5 показан конечный элемент $PL2W18$ с положительными направлениями узловых перемещений. Направления узловых сил совпадают с направлениями соответствующих перемещений.

Матрицу жесткости (5.3.18) в принципе можно проинтегрировать аналитически, особенно для аппроксимаций низшего порядка. Однако во всех случаях применяется более универсальный способ — численное интегрирование. При этом для пластины всегда можно выбрать схему, которая точно интегрирует матрицу жесткости.

5.3.2. Матрица масс

Функционал кинетической энергии (1.7.6) при изгибе однородной по толщине пластины имеет вид

$$\begin{aligned} T_e &= \frac{1}{2} \iint_{S_e} \rho h \left\{ \dot{w}^2 + \frac{h^2}{12} (\dot{\chi}_x^2 + \dot{\chi}_y^2) \right\} dS = \\ &= \frac{1}{2} \iint_{S_e} \dot{\mathbf{u}}^T \mathbf{R} \dot{\mathbf{u}} dS. \end{aligned} \quad (5.3.19)$$

$1 \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 1$

Здесь элементы матрицы $\mathbf{R}$ содержат плотность ρ и толщину h оболочки:

$$\mathbf{R} = \rho h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{12} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{h^2}{12} \end{bmatrix}$$

Если не учитывать инерцию вращения, то в этой матрице вместо $h^2/12$ следует принять нуль. Подставляя аппроксимацию (5.3.7) в функционал кинетической энергии (5.3.19), стандартным образом получаем матрицу масс конечного элемента

$$\mathbf{M}_e = \int_0^{1-L_1} \int_0^{L_1} \mathbf{N}^T \mathbf{R} \mathbf{N} 2\Delta dL_2 dL_1. \quad (5.3.20)$$

$3n \times 3n \quad 0 \quad 0 \quad 3n \times 3 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 3n$

Здесь $n=3, 6, 10$ — число узлов для конечного элемента первого, второго и третьего порядков соответственно.

5.3.3. Эквивалентные узловые силы

Положительные направления узловых сил совпадают с положительными направлениями узловых перемещений (см. рис. 5.5). Сосредоточенные внешние силы и моменты с учетом их направления прибавляются к узловым силам в ближайшем узле. Если на конечный элемент пластины действует поперечная распределенная нагрузка $q(x, y)$, то работу этой нагрузки определяет функционал (1.10.4) при $q_x = q_y = 0$:

$$W_q^e = \iint_{S_e^*} q w dS.$$

Здесь S_e^* — часть площади конечного элемента, на которую действует распределенная нагрузка (обычно разбивка пластины на конечные элементы проводится таким образом, чтобы нагрузка распределялась на всю площадь элемента S_e). В матричной записи функционал работы распределенной нагрузки имеет вид

$$W_{q^e} = \iint_{S_e^*} \mathbf{u}^T \mathbf{q} dS. \quad (5.3.21)$$

Здесь $\mathbf{q}^T = \{q, 0, 0\}$ — матрица нагрузок. Подставляя аппроксимацию (5.3.7) в функционал (5.3.21), получаем

$$W_{q^e} = \underset{1 \times 3n}{\mathbf{d}_e^T} \underset{3n \times 1}{\mathbf{F}_{q^e}}. \quad (5.3.22)$$

Здесь $\mathbf{F}_{q^e}$ — эквивалентные узловые силы от распределенной нагрузки:

$$\underset{3n \times 1}{\mathbf{F}_{q^e}} = \iint_{S_e^*} \underset{3n \times 3 \times 1}{\mathbf{N}^T} \underset{3 \times 1}{\mathbf{q}} \underset{2 \Delta d L_2 d L_1}{2 \Delta d L_2 d L_1}. \quad (5.3.23)$$

Положительные направления этих сил для элемента второго порядка показаны на рис. 5.5. В случае равномерно распределенной по всей площади конечного элемента нагрузки $q = \text{const}$ для элемента второго порядка ($n=6$) эквивалентные узловые силы согласно (5.3.23) вычисляются по формуле

$$\underset{18 \times 1}{\mathbf{F}_{q^e}} = q \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \underset{0 \ 0 \ 18 \times 3}{\mathbf{N}^T} \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{matrix} \right\} 2 \Delta d L_2 d L_1.$$

Аналитическим интегрированием устанавливаем эквивалентные узловые силы:

$$\underset{1 \times 18}{\mathbf{F}_{q^e}{}^T} = \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{1}{3} q \Delta, 0, 0, \right. \\ \left. \frac{1}{3} q \Delta, 0, 0, \frac{1}{3} q \Delta, 0, 0 \right\}.$$

Из этого выражения видно, что силы в узлах 4—6 равны $1/3$ статически эквивалентной равнодействующей нагрузки, а силы в угловых узлах 1—3 отсутствуют. Такое распределение сил энергетически эквивалентно исходному. Для элемента первого

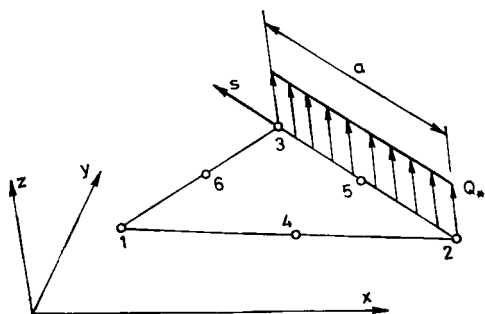


Рис. 5.6. Определение эквивалентных узловых сил от нагрузок на контуре пластины

порядка ($n=3$) в случае равномерно распределенной нагрузки имеем

$$\mathbf{F}_{q^e}^T = \left\{ \frac{1}{3} q\Delta, 0, 0, \frac{1}{3} q\Delta, 0, 0, \frac{1}{3} q\Delta, 0, 0 \right\}.$$

1×9

При произвольной распределенной нагрузке $q(x, y)$ эквивалентные узловые силы определяются численным интегрированием выражения (5.3.23). Эквивалентные узловые силы от контурных нагрузок вычисляются аналогичным образом при помощи функционала работы контурных сил (1.10.5). Проиллюстрируем их вычисление для элемента второго порядка (рис. 5.6). Работа распределенных контурных сил Q_* согласно (1.10.5) определяется интегралом

$$W_c = \int Q_* w ds = \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_c^e. \quad (5.3.24)$$

$1 \times 18 \quad 18 \times 1$

Согласно принятой нумерации узлов (см. рис. 5.6) на линии 2—3 контура пластины $L_1=0$; $ds = -a dL_2$; $L_3=1-L_2$. При постоянной контурной нагрузке $Q_* = \text{const}$ эквивалентные узловые силы в (5.3.24) вычисляются интегрированием следующего выражения:

$$\mathbf{F}_c^e = Q_* a \int_0^1 \mathbf{N}^T \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} dL_2.$$

$18 \times 1 \quad 0 \quad 18 \times 3$

После интегрирования получаем следующие значения эквивалентных узловых сил:

$$\mathbf{F}_c^e = \left\{ 0, 0, 0, \frac{1}{6} Q_* a, 0, 0, \frac{1}{6} Q_* a, 0, 0, \right. \\ \left. 0, 0, 0, \frac{2}{3} Q_* a, 0, 0, 0, 0, 0 \right\}.$$

При помощи функционала (1.10.5) аналогично вычисляются эквивалентные узловые силы от контурных моментов $M^*_{(vv)}$ и $M^*_{(vs)}$.

5.4. ТЕСТИРОВАНИЕ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Для обеспечения сходимости конечноэлементного решения необходимо выполнение трех условий: конечный элемент должен быть согласованным, удовлетворять условию перемещения элемента как жесткого тела и удовлетворять критерию постоянства деформаций [26].

Первое условие выполняется в результате применения функций формы (5.2.5) и (5.2.6) для аппроксимаций перемещений и геометрии, что обеспечивает неразрывность функции на межэлементных границах.

Для выполнения второго условия необходимо, чтобы для конечного элемента существовали три пространственных перемещения и три пространственных поворота элемента как жесткого тела без деформаций. Это означает, что матрица жесткости незакрепленного конечного элемента должна иметь шесть нулевых собственных значений. Тестирование проводилось на двух конечных элементах второго порядка с общим числом узлов, равным девяти (рис. 5.7). При этом рассматривался вариант элемента с пятью степенями свободы в узле без учета обжатия нормали ($\gamma=0$). Этот вариант конечного элемента обычно применяется при расчете гладких оболочек. Матрица жесткости одного треугольного элемента в этом случае имеет размер 30×30 , а для двух элементов в паре (см. рис. 5.7) — размер 45×45 . Собственные значения матрицы жесткости определялись методом вращения. В табл. 5.1 в порядке убывания приведен спектр собственных значений матрицы жесткости для пары треугольников (см. рис. 5.7). Из таблицы видно, что матрица жесткости имеет шесть нулевых собственных значений. Таким образом, конечный элемент CAU2W30 может совершать пространственные перемещения и повороты как жесткое тело без деформаций.

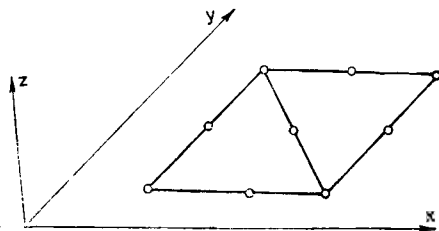


Рис. 5.7. Определение кинематических мод деформаций конечного элемента

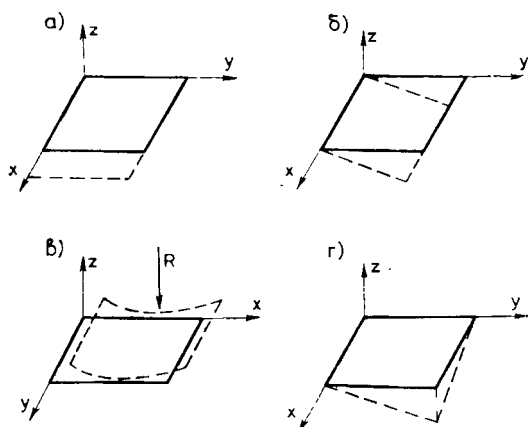


Таблица 5.1

Спектр частот матрицы жесткости

λ_1	$0,4730 \cdot 10^4$
λ_2	$0,2572 \cdot 10^4$
...	...
λ_{37}	$0,1082 \cdot 10^2$
λ_{38}	$0,1015 \cdot 10^2$
λ_{39}	$0,1408 \cdot 10^1$
λ_{40}	$0,4327 \cdot 10^{-3}$
λ_{41}	$0,2831 \cdot 10^{-3}$
λ_{42}	$0,2292 \cdot 10^{-3}$
λ_{43}	$0,8473 \cdot 10^{-4}$
λ_{44}	$0,3624 \cdot 10^{-13}$
λ_{45}	$0,3427 \cdot 10^{-13}$

Рис. 5.8. Однородные деформированные состояния:

а — растяжение; б — сдвиг; в — изгиб; г — кручение

Для проверки третьего условия поступали следующим образом. Пару плоских треугольных элементов, образующих прямоугольник, подвергали различным деформациям (рис. 5.8): растяжению, сдвигу, изгибу и кручению. Во всех случаях были получены почти одинаковые деформации во всех узловых точках и во всех точках интегрирования. Таким образом, для конечного элемента CAU2W30 выполняется условие постоянства деформаций.

Исследование практической сходимости решения для рассматриваемых конечных элементов проводится на тестовых примерах, которые будут рассмотрены далее.

ДВУМЕРНЫЕ ЗАДАЧИ ДЕФОРМИРОВАНИЯ ОБОЛОЧЕК И ПЛАСТИН

6.1. ВВЕДЕНИЕ

После разработки нового конечного элемента и перед его включением в библиотеку конечных элементов комплекса программ он должен пройти тестирование, апробацию при решении различных задач, а также экспериментальную проверку. Что касается предложенного в предыдущей главе нового треугольного конечного элемента для расчета пластин и оболочек, то для него в параграфе 5.4 были приведены тесты по проверке выполнения условия перемещений элемента как жесткого тела и по проверке критерия постоянства деформаций. Кроме того, для элемента должна быть выбрана схема численного интегрирования, обеспечивающая при минимальных затратах заданную точность.

Далее конечный элемент должен пройти апробацию на ряде тестовых задач. Вообще говоря, для объективной оценки нового конечного элемента набор этих тестовых задач должен быть стандартизирован. В настоящее время осуществляется попытка такой стандартизации, однако единый международный стандарт пока еще не разработан. Тем не менее разработчики новых конечных элементов тонкостенных конструкций для апробации используют ряд типовых тестовых задач. Это задачи статики: деформирование цилиндрического перекрытия под действием собственной массы, поперечное сжатие цилиндрической оболочки сосредоточенными силами или силами, распределенными по линиям образующей, сжатие сосредоточенными силами сферической оболочки; задачи потери устойчивости: устойчивость цилиндрических оболочек при осевом сжатии и внешнем давлении, выпучивание пологой цилиндрической панели под действием внешнего давления и др.; задачи динамики: расчет частоты собственных колебаний цилиндрических оболочек.

Работоспособность разработанных новых конечных элементов может быть проверена также путем сопоставления результатов расчета и эксперимента. Окончательное решение

о включении нового конечного элемента в библиотеку конечных элементов должно приниматься только после проведения весьма подробной экспертизы.

6.2. ЗАДАЧИ ИЗГИБА ОБОЛОЧЕК

Алгоритм решения задач изгиба был рассмотрен в параграфе 4.3. После решения системы линейных алгебраических уравнений определяются перемещения во всех узловых точках оболочки. Далее в каждом конечном элементе по формуле (5.2.11) в узлах вычисляются деформации, из которых по формуле (5.2.9) определяются внутренние интегральные силы σ . Далее проводится усреднение усилий в узлах от примыкающих к узлу элементов. Из усредненных усилий по алгоритмам, изложенным в параграфе 1.11, вычисляются напряжения.

Рассмотрим примеры решения ряда задач изгиба оболочек, которые использовались многими исследователями в качестве тестовых для проверки работоспособности и эффективности различных конечных элементов.

6.2.1. Изгиб цилиндрической оболочки под действием распределенной по образующей нагрузки

Рассмотрим изгиб цилиндрической оболочки из трансверсально-изотропного материала, нагруженной распределенной по линии образующей нагрузкой (рис. 6.1). Края оболочки свободны. Эта задача требует применения уравнений непологих оболочек. Кроме того, при $\nu=0$ легко получить ее точное аналитическое решение, рассматривая оболочку как кольцо единичной ширины. Эта задача в качестве тестовой (для изотропной оболочки) была рассмотрена в работе [134]. На примере этой задачи исследуем свойства сходимости конечного элемента второго порядка *CAU2W30* и конечного элемента третьего порядка *CAU3W50*. В обоих случаях конечные элементы имели пять степеней свободы в узле ($\nu=0$).

Ввиду симметрии рассматривается $1/4$ кольца шириной $\pi R/N$, где N — число блоков разбиения по $1/4$ окружности. Один блок содержит четыре треугольных конечных элемента (см. рис. 6.1). В этой задаче использовались координаты поверхности ($x^1=s$; $x^2=\varphi$). Граничные условия были следующими:

$$\gamma_\varphi=0 \quad \text{при} \quad \varphi=0, \pi/2;$$

$$v=0 \quad \text{при} \quad \varphi=0, \pi/2.$$

Таблица 6.1

Прогобы и изгибающие моменты в задаче изгиба цилиндрической оболочки

Число блоков N	$\bar{w}_A$		$\bar{w}_B$		$\bar{M}_A$		$\bar{M}_B$	
	CAU2W30	CAU3W50	CAU2W30	CAU3W50	CAU2W30	CAU3W50	CAU2W30	CAU3W50
1	21,71	67,84	-20,61	-60,61	0,0514	0,2268	-0,0513	-0,1271
2	55,61	96,98	-48,87	-86,26	0,1764	0,3163	-0,1050	-0,1833
3	82,76	97,49	-73,52	-86,65	0,2622	0,3177	-0,1574	-0,1826
4	92,51	97,49	-82,32	-86,65	0,2952	0,3180	-0,1761	-0,1811
5	95,25	97,41	-84,56	-86,58	0,3062	0,3181	-0,1801	-0,1808
8	97,19	—	-86,43	—	0,3156	—	-0,1824	—
12	97,20	—	-86,43	—	0,3156	—	-0,1824	—
Аналитиче- ское ре- шение	97,51		-86,72		0,3183		-0,1817	

Рассматривалась оболочка из трансверсально-изотропного материала с модулем упругости E , коэффициентом Пуассона в плоскости оболочки $\nu=0$ и модулем поперечного сдвига $E/G_{13}=E/G_{23}=20$. Числовые значения были получены для оболочки с относительной толщиной $R/h=10$ (табл. 6.1). В таблице представлены безразмерный прогиб и изгибающий момент $M_{\varphi\varphi}$ в точках A ($\varphi=0$) и B ($\varphi=\pi/2$): $\bar{w}_A=Eh\omega_A/qR$; $\bar{M}_A=M_{\varphi\varphi A}/qR$.

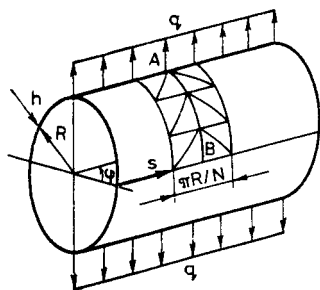


Рис. 6.1. Изгиб цилиндрической оболочки под действием распределенной нагрузки

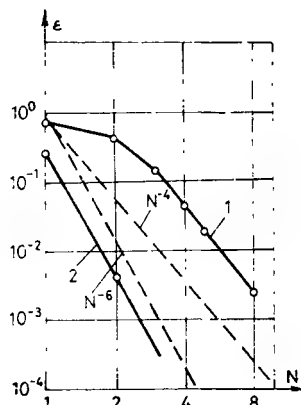


Рис. 6.2. Сходимость решения для прогиба под нагрузкой:

1 — конечный элемент CAU2W30; 2 — элемент CAU3W50

Численное интегрирование матрицы жесткости было проведено по схеме пятого порядка, и система линейных уравнений решалась методом исключения Гаусса с двойной точностью. Из анализа результатов следует (см. табл. 6.1), что при увеличении N все величины сходятся к точным значениям. Для выявления эффективности элементов второго и третьего порядка необходимо провести их сравнение по некоторым показателям при одинаковой относительной погрешности результата. Так, используя элемент *CAU3W50* с разбивкой $N=2$, имеем примерно такую же относительную погрешность результатов, как при разбивке $N=8$ для элемента *CAU2W30*.

Данные, характеризующие размеры задач и время их решения с использованием элементов второго и третьего порядка (табл. 6.2), свидетельствуют о том, что полуширина ленты системы линейных алгебраических уравнений при использовании элемента второго порядка значительно меньше, чем при использовании элемента третьего порядка. Это является основным параметром, определяющим требуемый минимум оперативной памяти и время решения, а следовательно, эффективность решения задачи. Несмотря на то что элемент третьего порядка имеет большую скорость сходимости, из-за большой полуширины ленты раньше сказывается эффект накопления ошибок округления даже при решении системы уравнений с двойной точностью (см. результаты в табл. 6.1 для $N=5$). Поэтому для решения практических задач рекомендуется использовать элемент второго порядка. Однако ясно, что элемент третьего порядка может оказаться более эффективным в задачах с большими градиентами деформаций. В этом случае в зонах больших градиентов искомых функций следует применять элемент третьего порядка, а в остальной части оболочки — элемент второго порядка.

Далее исследуем свойства сходимости элементов. Если $k-1$ — степень аппроксимирующего полинома в конечном элементе и m — порядок высшей производной в минимизируемом функционале, то погрешность энергии деформаций пропорциональна $N^{-2(k-m)}$ (см. работу [74] и приложение 3). Следова-

Таблица 6.2

Характеристики размера задачи

Элемент	Число блоков N	Число урав- нений	Полу- ширина ленты	Время счета на ЕС-1022, мин
<i>CAU2W30</i>	8	510	78	20
<i>CAU3W50</i>	2	294	174	30

тельно, для элемента второго порядка ($k=3$; $m=1$) имеем оценку N^{-4} , а для элемента третьего порядка ($k=4$; $m=1$) — оценку N^{-6} . Согласно теореме Кастильяно прогиб под сосредоточенной нагрузкой определяется как производная энергия деформаций по нагрузке, следовательно, для прогиба в точке A имеем оценки N^{-4} и N^{-6} для элементов второго и третьего порядка соответственно. На рис. 6.2 в двойном логарифмическом масштабе изображено уменьшение относительной погрешности результата ($\varepsilon = (\varepsilon_* - \varepsilon_T)/\varepsilon_T$, где ε_T — теоретическое решение, ε_* — численное решение) при увеличении числа блоков разбивки на $1/4$ кольца. Из графиков на рис. 6.2 следует, что практическая асимптотическая погрешность определения прогиба под нагрузкой согласуется с теоретически предсказанным результатом для элементов как второго, так и третьего порядка.

При вычислении элементов матриц жесткости, масс и геометрической жесткости численным интегрированием важным является вопрос о выборе порядка схемы. Естественно, что с точки зрения затрат необходимо применять схему с минимальным числом узловых точек, обеспечивающую необходимую точность. Для пластины всегда можно установить порядок полинома в подынтегральной функции и выбрать схему, которая интегрирует точно полином заданного порядка. В оболочках при применении изопараметрической техники в подынтегральных выражениях появляются рациональные функции, поэтому схему интегрирования следует подбирать путем численных экспериментов. Здесь можно руководствоваться следующим общим правилом: порядок схемы интегрирования должен быть таким, чтобы могла обеспечиваться такая же или несколько меньшая (но не большая), чем основная ошибка аппроксимации, погрешность интегрирования.

При вычислении элементов матрицы жесткости, масс или геометрической жесткости интеграл заменяется суммой:

$$\int_0^{1-L_1} \int_0^L f(L_1, L_2) dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^n W_i f(L_1^i, L_2^i). \quad (6.2.1)$$

Здесь n — число точек интегрирования; W_i — весовые коэффициенты; L_1^i, L_2^i — значения L -координат в точках интегрирования. Для треугольной области были представлены схемы интегрирования различного порядка [26, 73, 74]. Некоторые из этих схем были применены в рассмотренной тестовой задаче. В табл. 6.3 представлены результаты определения прогиба $\bar{w}_A$ при разбивке $N=5$ для элемента второго порядка в зависимости от порядка схемы интегрирования. Дальнейшее увеличение порядка схемы практически не изменяло результата,

Таблица 6.3

**Результаты решения задачи в зависимости от применяемой схемы
численного интегрирования**

№ схемы	Число точек	Степень точности (порядок схемы)	Координаты точек интегрирования			Весовые коэффици- енты $2W_i$	Прогресс ω_A	Координаты
			L_1	L_2	L_3			
1	3	2	α β β	β α β	β β α	1/3	98,30	$\alpha=2/3$ $\beta=1/6$
2	3	2	1/2 0 1/2	1/2 1/2 0	0 1/2 1/2	1/3	95,09	
3	4	3	1/3 0,6 0,2 0,2	1/3 0,2 0,6 0,2	1/3 0,2 0,2 0,6	-0,5625 0,5208(3)	99,02	
4	6	3	α α β β γ γ	β γ α γ α β	γ β γ α β α	1/6	97,84	$\alpha=0,6590276$ $\beta=0,2319334$ $\gamma=0,1090390$
5	6	4	α β β γ Δ Δ	β α β Δ γ Δ	β β α Δ Δ γ	0,1099517(3) 0,2233816(3)	96,54	$\alpha=0,8168456$ $\beta=0,0915762$ $\gamma=0,4459485$ $\Delta=0,10810302$
6	7	4	1/3 α α β β γ γ	1/3 β γ α γ α β	1/3 γ β γ α β α	0,3750 0,10416(6)	96,26	$\alpha=0,7367125$ $\beta=0,2379324$ $\gamma=0,0253551$
7	7	5	1/3 α β β γ Δ Δ	1/3 β α β Δ γ Δ	1/3 β β α Δ Δ γ	0,225033 0,1259391(3) 0,1323941(3)	95,25	$\alpha=0,7974270$ $\beta=0,1012865$ $\gamma=0,0597158$ $\Delta=0,4701421$

Точное решение

97,51

который был получен с использованием схемы № 7 пятого порядка (см. табл. 6.3). Следовательно, результат для схемы № 7 практически не содержит ошибки численного интегрирования, а содержит только основную ошибку аппроксимации. При данной разбивке она составляет 2,3%. Меньшую ошибку интегрирования дают схемы четвертого порядка (схемы № 5 и № 6). С практической точки зрения схемы № 1, 2 и 4 также могут применяться при решении данной задачи, так как ошибка интегрирования в этом случае лишь несколько превышает основную ошибку аппроксимации. Однако применение в интегрировании матрицы жесткости схем пониженного порядка может привести к тому, что для матрицы жесткости дополнительно к шести нулевым собственным значениям появляется ряд малых собственных значений [103]. Это приводит к дополнительным кинематическим модам деформаций конечного элемента как жесткого тела, и численное решение задачи может не сходиться. Схема № 3 не рекомендуется для практического использования, так как она содержит отрицательный весовой коэффициент. Интегрирование элементов матриц масс и геометрической жесткости почти всегда проводится по схеме такого же порядка, что и интегрирование элементов матрицы жесткости.

Проблемы выбора порядка схемы интегрирования обсуждаются также в приложении 4.

6.2.2. Изгиб цилиндрического перекрытия под действием распределенной вертикальной нагрузки

Рассмотрим задачу изгиба цилиндрического перекрытия (рис. 6.3) из трансверсально-изотропного материала под действием собственной массы. Оболочка на торцах оперта на нерастяжимые диафрагмы (мембраны), а на краях свободна. Эта задача с конечноэлементной аппроксимацией в качестве тестовой рассматривалась многими авторами [26, 79, 91, 110, 135, 175 и др.]. Для нее было получено также решение в тригонометрических рядах [154].

Исходные данные для численного расчета следующие: $E=2 \cdot 10^4$ МПа; $\nu=0,2$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$; удельный вес $\gamma=2,5 \cdot 10^4$ Н/м³; $R=7,65$ м; $L=15,30$ м; $h=0,0765$ м. На единицу площади оболочки действует вертикальная распределенная нагрузка от собственной массы $q_\gamma=\gamma h=1,9 \cdot 10^3$ Па. Эту нагрузку следует разложить на компоненты в направлении нормали и касательной к поверхности оболочки:

$$q = -q_\gamma \cos \varphi; \quad q_{(2)} = q_\varphi = -q_\gamma \sin \varphi.$$

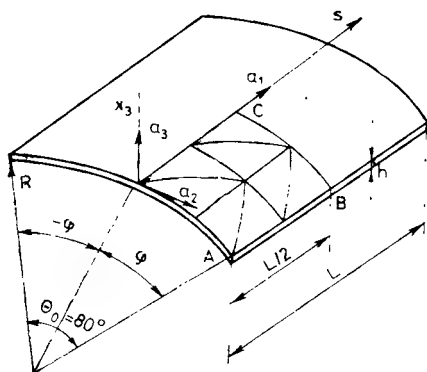


Рис. 6.3. Изгиб цилиндрического перекрытия под действием собственной массы

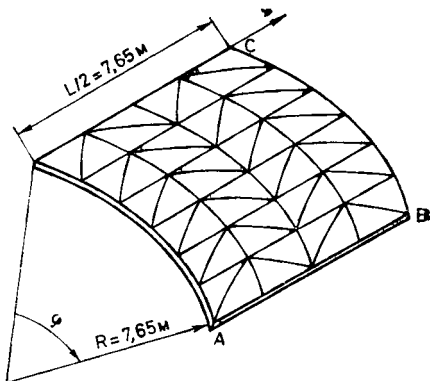


Рис. 6.4. Разбивка 1/4 оболочки на конечные элементы

Граничные условия задачи следующие:

$$v=0; \quad s=0, L;$$

$$w=0; \quad s=0, L.$$

Ввиду симметрии нагрузок и граничных условий можно рассматривать 1/4 оболочки, используя следующие условия на осях симметрии:

$$v, \gamma_\varphi=0; \quad \varphi=0;$$

$$u, \gamma_s=0; \quad s=L/2.$$

При решении использовалась разбивка 4×6 (рис. 6.4), т. е. разбивка на 48 конечных элементов. Результаты решения в виде графиков функций перемещений, моментов и мембранных усилий (рис. 6.5) примерно совпадают с результатами работ [79, 93, 154], а также с результатами работы [175], где применялась сокращенная схема интегрирования для энергии деформаций сдвига. При сравнении следует учитывать, что в настоящей работе заданная внешняя нагрузка принята в 2,3 раза, а модуль упругости в 1,055 раза меньше, чем в указанных работах. Остальные параметры геометрии оболочки совпадают. Исключение составляют коэффициент Пуассона ($\nu=0,2$ вместо $\nu=0$) и модуль поперечного сдвига, который здесь принят уменьшенным для исключения искусственного увеличения жесткости конструкции, поэтому в нашем случае прогибы получаются на несколько процентов больше. При расчете данного примера применялась полная схема интегрирования (см. схему № 7 в табл. 6.3) для всех слагаемых функционала энергии деформаций.

В табл. 6.4 для сравнения представлены результаты решения этой задачи различными исследователями. Для сравнения все результаты приведены к одинаковым единицам измерения. При пересчете результаты настоящей работы для перемещений умножались на коэффициент $2,3/1,055=2,18$, а для усилий и моментов — на коэффициент 2,3. При этом в работах [135, 154] приведены перемещения U, V, W в декартовых координатах X, Y, Z (см. рис. 6.3), которые связаны с перемещениями u, v, w в координатах поверхности s, φ, x_3 зависимостями

$$u = U;$$

$$v = -W \sin \varphi + V \cos \varphi;$$

$$w = W \cos \varphi + V \sin \varphi.$$

В табл. 6.4 приведены перемещения в координатах поверхности s, φ, x_3 . В работе [93] использовался искривленный

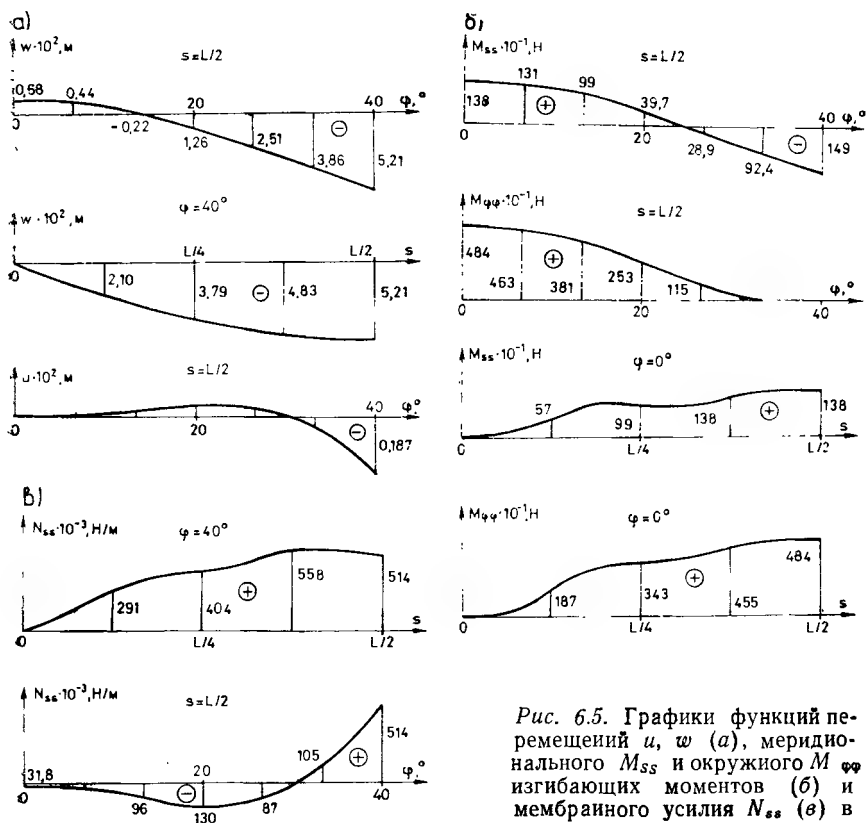


Таблица 6.4

Результаты решения задачи изгиба цилиндрического перекрытия под действием собственной массы

Параметр	Метод конечных элементов			Решение в тригонометрических рядах [154]
	CAU2W30	[93]	[135]	
Разбивка	4×6	4×4	10×10	—
Число неизвестных	585	225	630	—
$u_A \cdot 10^2$, м	−0,4080	−0,3836	−0,3600	−0,3843
$w_B \cdot 10^2$, м	−11,35	−10,37	−10,00	−10,41
$v_B \cdot 10^2$, м	2,420	2,219	2,163	2,225
$w_C \cdot 10^2$, м	1,482	1,327	1,375	1,333
$N_{ss}^B \cdot 10^{-3}$, Н/м	1182	1161	1092	1146
$M_{\varphi\varphi}^C \cdot 10^{-1}$, Н	1113	947,5	749,1	933,5
$M_{ss}^C \cdot 10^{-1}$, Н	317	58,2	115,3	42,1
ν	0,2	0	0	0
$E/G_{13}=E/G_{23}$	20	2	2	2

треугольный конечный элемент с 36 степенями свободы, а в работе [135] — плоский треугольный конечный элемент с 18 степенями свободы. Из табл. 6.4 следует, что применение плоских конечных элементов в этой задаче [135] при одинаковом числе неизвестных приводит к значительно менее точным результатам, чем применение искривленных конечных элементов. Особенно это относится к точности определения моментов. Для достижения одинаковой точности при применении плоских элементов число неизвестных должно быть в несколько раз большим, чем для искривленных элементов.

6.3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для исследования свойств сходимости конечного элемента CAU2W30 в задачах динамики рассмотрим задачу об определении частот собственных колебаний защемленной по торцам цилиндрической оболочки (рис. 6.6). Ввиду симметрии граничных условий и форм колебаний рассматривается половина длины оболочки с сектором π/n , где n — число волн по окружности собственной формы колебаний. Граничные условия в этом случае следующие: $u=v=w=\gamma_s=\gamma_\varphi=0$ при $s=0$; $u, \gamma_s=0$ при $s=L/2$ для симметричных по длине оболочки форм колебаний; $u=w=0$ при $s=L/2$ для антисимметричных по длине оболочки форм колебаний. При этом на узловых линиях по окружности оболочки граничные условия следующие: $v=\gamma_\varphi=0$ при $\varphi=0, \pi/n$. Задача нахождения собственных частот сводится к отысканию собственных значений уравнения (4.6.4). Расчеты проведены для трансверсально-изотропной оболочки при следующих параметрах: $E=10^4$ Па; $\nu=0,2$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$; $\rho=1$ кг/м³; $R=1$ м; $L=3$ м; $h/R=0,0525$. Рассматривается собст-

Таблица 6.5

Сходимость решения при определении частоты ($m=1$; $n=3$) собственных колебаний защемленной цилиндрической оболочки

Число блоков N	Порядок матриц K и M	Число итераций	$\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$
1	45	6	0,5016
2	125	5	0,2534
3	245	5	0,2244
4	405	5	0,2179
5	605	6	0,2159

венная форма колебаний с числом волн по окружности $n=3$ и с числом полуволн по длине оболочки $m=1$. В табл. 6.5 представлены результаты расчета частот в зависимости от числа блоков разбиения. Результаты представлены в безразмерном виде: $\omega_* = \omega R \sqrt{\rho(1-\nu^2)}/E$. Определена низшая частота уравнения (4.6.4).

Проведем оценку сходимости полученных решений. Эта задача не имеет аналитического решения, и не известно точное значение частоты, к которому стремится результат при увеличении N . Тем не менее можно получить оценку точного значения, поступая следующим образом. Известно (см. [74] и приложение 3), что уменьшение ошибки минимального собственного значения уравнения (4.6.4) и энергии деформаций

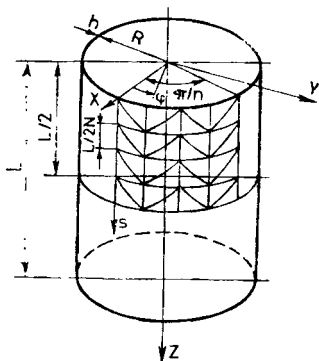
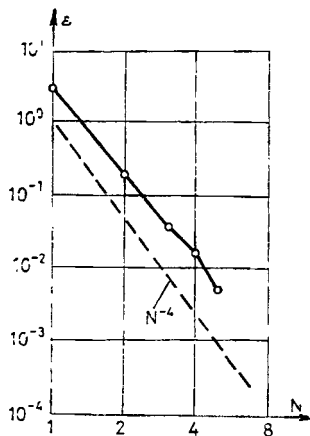


Рис. 6.6. Разбивка цилиндрической оболочки на конечные элементы

Рис. 6.7. Сходимость решения для частоты собственных колебаний при $m=1$ и $n=3$

пропорционально $N^{-2(k-m)}$. Для элемента $CAU2W30$ это соответствует N^{-4} и две точки на графике сходимости должны находиться на прямой N^{-4} . Сходящаяся последовательность, строго говоря, может существовать только для разбивки $N=1, 2, 4, 8, 16$ и т. д., т. е. последующие разбивки должны включать предшествующие [74]. Тогда точное решение ω_T может быть определено из уравнения

$$\lg \varepsilon_1 - \lg \varepsilon_2 = \lg \alpha (\lg N_2 - \lg N_1). \quad (6.3.1)$$

Здесь $\varepsilon_1 = (\omega^*_1 - \omega_T)/\omega_T$; $\varepsilon_2 = (\omega^*_2 - \omega_T)/\omega_T$; ω^*_1, ω^*_2 — частота при разбивке N_1 и N_2 соответственно; α — угол наклона прямой N^{-4} к оси абсцисс (в двойном логарифмическом масштабе).

Сходимость к точному решению в зависимости от числа блоков разбиения показана на рис. 6.7. Для нахождения точного решения использовались точки $N=2$ и $N=4$. Как видно из рис. 6.7, контрольная точка ($N=1$) располагается точно на прямой, проходящей через точки N_1 и N_2 , что свидетельствует о правильности методики оценки точного решения. Точки на рис. 6.7, соответствующие решению с разбивкой $N=3$ и $N=5$, вообще говоря, могут не находиться точно на графике сходимости, так как эти разбивки не включают предыдущие. Однако в рассматриваемом случае и эти точки находятся близко к прямой N^{-4} .

6.4. КОЛЕБАНИЯ РЕБРИСТЫХ ОБОЛОЧЕК

Методику анализа ребристых оболочек с произвольной системой ребер рассмотрим на примере определения частот собственных колебаний цилиндрической оболочки со спирально-винтовой системой ребер (рис. 6.8). Ребра прямоугольного поперечного сечения следуют по геодезической линии цилиндрической поверхности и образуют угол α с меридианом оболочки. При этом ребра расположены по нормали к поверхности цилиндра и образуют спирально-винтовую поверхность, так называемый геликоид [27]. Система криволинейных координат x^1, x^2, x_3 на геликоидальной поверхности изображена на рис. 6.9. Ребра, как и обшивка оболочки, моделируются тонкостенными оболочечными конечными элементами. При этом матрицы жесткости для конечных элементов в обшивке выводятся в координатах s, φ цилиндрической поверхности, а для конечных элементов в ребрах — в геликоидальных координатах x^1, x^2 .

Рассмотрим получение кинематических соотношений варианта пологих оболочек (1.5.4) в геликоидальных координатах. Для этого, используя геометрические соотношения приложения 1, получаем первый ($a_{\alpha\beta}$) и второй ($b_{\alpha\beta}$) тензоры геликоидальной поверхности. Положение любой точки в ребре харак-

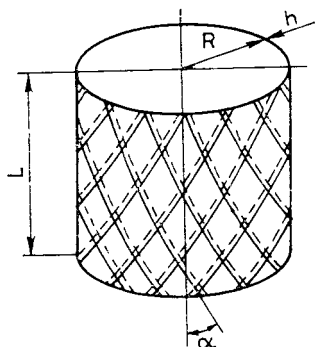


Рис. 6.8. Цилиндрическая оболочка со спирально-винтовой системой ребер.

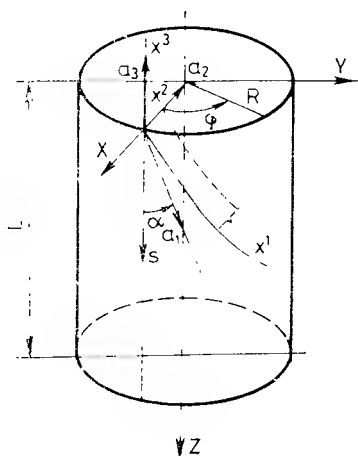


Рис. 6.9. Система координат на геликоидальной поверхности

теризует радиус-вектор $\bar{r}(x^i)$ (П1.1). При этом положение точки на срединной поверхности ребра характеризует радиус-вектор

$$\mathbf{r}(x^\alpha) = X\mathbf{i}_1 + Y\mathbf{i}_2 + Z\mathbf{i}_3, \quad (6.4.1)$$

где

$$X = (R - x^2) \cos \left(\frac{x^1}{R} \sin \alpha \right);$$

$$Y = (R - x^2) \sin \left(\frac{x^1}{R} \sin \alpha \right); \quad Z = x^1 \cos \alpha.$$

Здесь $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — орты глобальной декартовой системы координат X, Y, Z ; α — угол наклона ребра к меридиану; R — радиус оболочки. По соотношениям (П1.2), (П1.4), (П1.9) определяем необходимые геометрические величины:

$$a_{\alpha\beta} = \mathbf{a}_\alpha \cdot \mathbf{a}_\beta = \mathbf{r}_{,\alpha} \cdot \mathbf{r}_{,\beta}; \quad b_{\alpha\beta} = -\mathbf{a}_\beta \cdot \mathbf{a}_{3,\beta};$$

$$\mathbf{a}_3 = \frac{\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta}{|\mathbf{a}_\alpha \times \mathbf{a}_\beta|}. \quad (6.4.2)$$

Подставляя (6.4.1) в (6.4.2), получаем

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad b_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sin 2\alpha}{2R\sqrt{a}} \\ \frac{\sin 2\alpha}{2R\sqrt{a}} & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4.3)$$

Здесь $a_{11} = a = \det(a_{\alpha\beta}) = \cos^2 \alpha + \frac{(R - x^2)^2}{R^2} \sin^2 \alpha$.

Кинематические соотношения (1.5.4) для геликоидальной оболочки принимают следующий вид ($v_{(1)}=u$; $v_{(2)}=v$; $\gamma_{(1)}=\gamma_u$; $\gamma_{(2)}=\gamma_v$):

$$\begin{aligned}\Omega_{(11)} &= \frac{1}{\gamma a} \frac{\partial u}{\partial x^1} + \frac{A}{a} v; & \Omega_{(22)} &= \frac{\partial v}{\partial x^2}; \\ 2\Omega_{(12)} &= \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{1}{\gamma a} \frac{\partial v}{\partial x^1} - \frac{A}{\gamma a} u - \frac{\sin 2\alpha}{Ra} w; \\ \chi_{(11)} &= \frac{1}{\gamma a} \frac{\partial \gamma_u}{\partial x^1} + \frac{A}{a} \gamma_v; & \chi_{(22)} &= \frac{\partial \gamma_v}{\partial x^2}; & 2\chi_{(12)} &= \frac{\partial \gamma_u}{\partial x^2} + \\ &+ \frac{1}{\gamma a} \frac{\partial \gamma_v}{\partial x^1} - \frac{A}{\gamma a} \gamma_u - \frac{\sin 2\alpha}{Ra} \gamma; \\ 2\Omega_{(13)} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2Ra} v + \frac{1}{\gamma a} \frac{\partial w}{\partial x^1} + \gamma_u; \\ 2\Omega_{(23)} &= -\frac{\sin 2\alpha}{2Ra} u + \frac{\partial w}{\partial x^2} + \gamma_v; & \Omega_{(33)} &= \gamma.\end{aligned}\quad (6.4.4)$$

Здесь $A = (x^2 - R) \frac{\sin^2 \alpha}{R^2}$.

Эти соотношения записываются в матричном виде:

$$\varepsilon = \mathbf{L} \mathbf{u}. \quad (6.4.5)$$

Отметим, что при расчете ребристых оболочек обязательно необходимо учитывать все шесть степеней свободы в узле. При трансформации обобщенных перемещений в различных координатных системах требуются все три компоненты вектора поворота γ .

Далее стандартным путем получают матрица жесткости конечного элемента (5.2.17) и матрица масс (5.2.19). При этом для конечных элементов в обшивке матрицы определены в координатах поверхности цилиндра (s, φ) , а для конечных элементов в ребрах — в геликоидальных координатах (x^1, x^2) . Для решения задачи о совместном деформировании ребер и обшивки соответствующие матрицы необходимо привести к общей декартовой системе координат X, Y, Z (см. рис. 6.9). Преобразование матрицы жесткости в общую систему координат производится так же, как изложено в параграфе 4.5, по формуле (4.5.4):

$$\tilde{\mathbf{K}}_e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}_e \mathbf{T}. \quad (6.4.6)$$

Здесь T — матрица трансформации:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & T_1 \end{bmatrix}$$

36×36

$$T_1 = \begin{bmatrix} T_2 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix}$$

6×6

При переходе от координат поверхности (s, φ) к декартовым координатам матрица преобразований имеет вид

$$T_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4.7)$$

3×3

Здесь φ — угол, характеризующий смещение точки на обшивке оболочки относительно оси X (см. рис. 6.9).

Для конечных элементов в ребрах имеем следующую матрицу преобразований:

$$T_2 = \begin{bmatrix} \frac{x^2 - R}{R\sqrt{a}} \sin \alpha \sin \Theta & \frac{R - x^2}{R\sqrt{a}} \sin \alpha \cos \Theta & \frac{\cos \alpha}{\sqrt{a}} \\ -\cos \Theta & \sin \Theta & 0 \\ \frac{\cos \alpha}{\sqrt{a}} \sin \Theta & -\frac{\cos \alpha}{\sqrt{a}} \cos \Theta & \frac{R - x^2}{R\sqrt{a}} \sin \alpha \end{bmatrix} \quad (6.4.8)$$

3×3

где

$$\Theta = \frac{x^1 \sin \alpha}{R}.$$

Таким же образом в глобальную декартову систему координат преобразуется матрица масс.

В данной задаче число конечных элементов большое, поэтому для сокращения времени счета применяется метод суперэлементов [37]. Общая матрица жесткости конструкции формируется из соответствующих матриц суперэлементов.

Матрица жесткости суперэлемента может быть получена следующим путем. Сначала обычным образом формируется

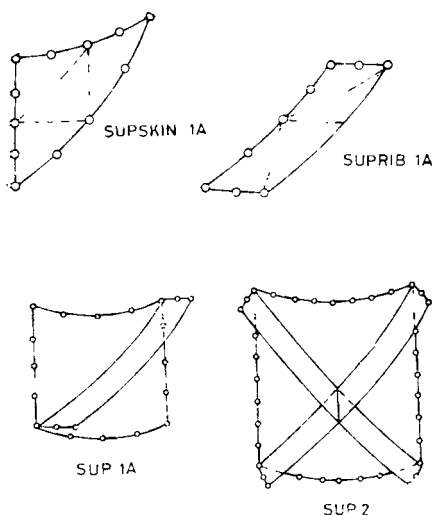


Рис. 6.10. Суперэлементы ребристой оболочки

ных элементов обшивки и ребер (рис. 6.10) формируются суперэлементы первого уровня для обшивки *SUPSKIN1A* и для ребер *SUPRIB1A* оболочки. Из данных суперэлементов формируются суперэлементы следующего уровня *SUP1A*, из которых формируется суперэлемент *SUP2*. Элемент *SUP2* является базисным элементом, из которого формируется матрица жесткости всей конструкции.

Матрицу масс суперэлемента получаем следующим образом [37]. Сначала, как обычно, формируется матрица масс для подконструкции, которая представляется в блочном виде аналогично матрице жесткости (6.4.9):

$$M = \begin{bmatrix} M_{ii} & M_{ia} \\ M_{ai} & M_{aa} \end{bmatrix} \quad (6.4.11)$$

Матрицу масс суперэлемента можно получить в следующем виде [37]:

$$M_a = M_{aa} - M_{ai} K_{aa}^{-1} K_{ia} - K_{ai} K_{ii}^{-1} \{ M_{ia} - M_{ii} K_{ii}^{-1} K_{ia} \}, \quad (6.4.12)$$

где K_{ii} , K_{ia} , K_{ai} — блоки матрицы жесткости соответствующей подконструкции (6.4.9).

матрица жесткости подконструкции (части конструкции). Узловые точки подконструкции разделяются на внутренние (i) и внешние (a). Если матрицу жесткости K подконструкции можно представить в блочном виде:

$$K = \begin{bmatrix} K_{ii} & K_{ia} \\ K_{ai} & K_{aa} \end{bmatrix} \quad (6.4.9)$$

то матрица жесткости K_a суперэлемента определяется следующим образом:

$$K_a = K_{aa} - K_{ai} K_{ii}^{-1} K_{ia}. \quad (6.4.10)$$

В данной задаче расчета оболочки со спирально-винтовой системой ребер применяются суперэлементы нескольких уровней. Сначала из конеч-

Окончательное матричное уравнение задачи о свободных колебаниях будет иметь вид

$$\tilde{\mathbf{K}} \tilde{\mathbf{d}}_0 - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}} \tilde{\mathbf{d}}_0 = 0, \quad (6.4.13)$$

где $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{M}}$, $\tilde{\mathbf{d}}_0$ — матрицы жесткости, масс и амплитуд колебаний узлов всей конструкции в общей системе координат.

Кинематические граничные условия для задачи (6.4.13) сформулированы в различных координатных системах поверхностей оболочки (обшивки и ребер). После их трансформации в декартову систему координат получаем связанные граничные условия, которые могут быть записаны в виде

$$\mathbf{A} \tilde{\mathbf{d}}_0 = 0. \quad (6.4.14)$$

Здесь $\mathbf{A}$ — матрица коэффициентов линейных кинематических условий. Для учета граничных условий (6.4.14) в задаче (6.4.13) составляется следующая вспомогательная функция:

$$\Pi_* = \tilde{\mathbf{d}}_0^T \{ \tilde{\mathbf{K}} - \omega^2 \tilde{\mathbf{M}} \} \tilde{\mathbf{d}}_0 + \lambda^T \mathbf{A} \tilde{\mathbf{d}}_0. \quad (6.4.15)$$

Здесь λ — матрица множителей Лагранжа, число которых соответствует количеству граничных условий (6.4.14). Из условия минимума функции (6.4.15)

$$\frac{\partial \Pi_*}{\partial \tilde{\mathbf{d}}_0^T} = 0; \quad \frac{\partial \Pi_*}{\partial \lambda^T} = 0$$

получаем следующее уравнение:

$$\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{K}} & \mathbf{A}^T \\ \mathbf{A} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_0 \\ \lambda \end{Bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{d}}_0 \\ \lambda \end{Bmatrix} = 0. \quad (6.4.16)$$

Из этого уравнения определяются низшие частоты собственных колебаний ребристой оболочки. При этом используется алгоритм, который описан в приложении 2.

Изложенная методика определения собственных частот использовалась при решении прямой задачи оптимизации по массе ребристой оболочки при ограничении на минимальную частоту собственных колебаний [66].

Рассмотрим численный пример расчета углепластиковой оболочки со следующими исходными данными: длина оболочки $L=3,14$ м, радиус обшивки оболочки $R=1$ м, на торцах заданы граничные условия жесткого защемления. Обшивка оболочки выполнена в виде многослойного, однородного по толщине углеэпоксидного композита, монослой которого имеют

однаправленную структуру армирования со следующими характеристиками: $E_1=E_2=0,16 \cdot 10^5$ МПа; $E_3=1,8 \cdot 10^5$ МПа; $G_{13}=G_{23}=0,468 \cdot 10^4$ МПа; $\nu_{31}=\nu_{32}=0,289$; $\nu_{13}=\nu_{23}=0,026$; $\nu_{12}=0,38$ (ось 3 направлена вдоль волокон, оси 1 и 2 расположены в плоскости изотропии этого трансверсально-изотропного монослоя). Монослой составляют углы $0, +45, -45, 90^\circ$ к меридиану оболочки. Относительное содержание волокон в этих направлениях составляет $0,25; 0,25; 0,25; 0,25$, т. е. в плоскости обшивки структура армирования образует квазиизотропный по упругим характеристикам композит. Спирально-винтовые ребра оболочки однослойные, однонаправленно армированные, выполнены из того же материала и расположены под углами 45 и 135° к меридиану оболочки. Число ребер равно восьми ($n_r=8$). Рассмотрим, как влияют на минимальную частоту собственных колебаний толщина обшивки h_0 и высота ребра h_r . Ширина ребра $b_r=h_r/10$. Результаты расчета минимальных собственных частот ребристой оболочки при различных толщине обшивки h_0 и высоте ребра h_r (табл. 6.6) свидетельствуют о том, что для трех проектов реализуются три различные формы колебаний при минимальной частоте. Если обшивка оболочки имеет большую относительную толщину (проект 1), то характерна общая форма колебаний A , как и для гладких оболочек (рис. 6.11,а). В случае тонкой обшивки и при высоких ребрах (проект 2) местные колебания совершает только обшивка и имеет место форма колебаний B (рис. 6.11,б). При определенных соотношениях толщины обшивки и высоты ребра (проект 3) реализуется связная форма колебаний C , когда обшивка и ребра колеблются вместе (рис. 6.11,в). Варьируемые параметры подобраны так, чтобы частота колебаний для всех проектов была примерно одинаковой (см. табл. 6.6). Однако если сравнивать проекты по объему материала, расходуемого для изготовления оболочки, то оптимальным оказывается проект 2.

Таблица 6.6

Минимальные частоты собственных колебаний для различных проектов ребристой оболочки

№ проекта	Толщина обшивки h_0 , м	Высота ребра h_r , м	Частота колебаний ω , рад/с	Форма колебаний	Объем оболочки V , м ³
1	0,013	0,131	2054	A	0,3152
2	0,0075	0,256	2056	B	0,2121
3	0,010	0,168	2036	C	0,2547

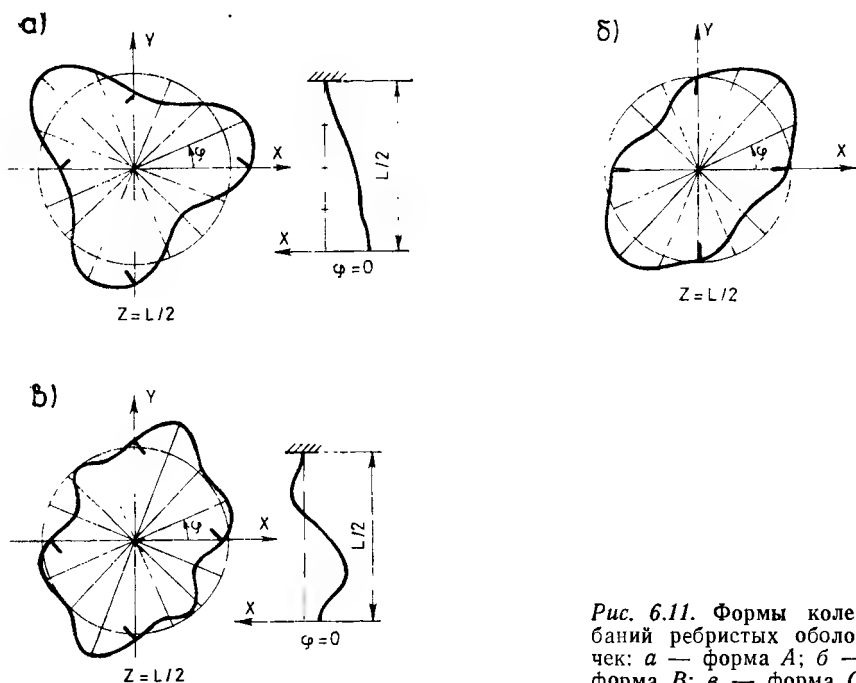


Рис. 6.11. Формы колебаний ребристых оболочек: а — форма А; б — форма В; в — форма С

Таким образом, расчет ребристых оболочек по модели разветвленной оболочки позволяет менять параметры обшивки и ребер в широком диапазоне. При этом появляется возможность оптимизации оболочек.

6.5. УСТОЙЧИВОСТЬ КОНИЧЕСКИХ ОБОЛОЧЕК

Для установления работоспособности конечного элемента *CAU2W30* в задачах устойчивости рассмотрим оболочку в виде усеченного конуса под действием внешнего давления (рис. 6.12). В линейаризованном подходе критическая нагрузка оболочки рассчитывается как минимальное собственное значение уравнения устойчивости:

$$Kd + \lambda Gd = 0. \quad (6.5.1)$$

Здесь матрицы жесткости **K** и геометрической жесткости **G** всей оболочки определяются из соответствующих матриц для конечного элемента K_e (5.2.17) и G_e (5.2.22). При этом входящие в геометрическую матрицу жесткости докритические усилия определяются из решения линейной задачи изгиба

оболочки в докритическом состоянии при единичных внешних нагрузках:

$$Kd_0 = F. \quad (6.5.2)$$

Здесь d_0 — докритические узловые перемещения при единичной нагрузке.

Соответствующий наименьшему собственному значению уравнения (6.5.1) собственный вектор определяет форму потери устойчивости для возмущенных перемещений d .

При численном решении рассматривалась трансверсально-изотропная (в плоскости) оболочка со следующими характеристиками: $E=10^5$ МПа; $G_{12}=E/2(1+\nu)$; $\nu=0,3$; $G_{13}=G_{23}=E/20$; $h=0,02$ м; $L=1$ м; $R_1=1$ м; $R_2=0,5$ м; $\alpha=60^\circ$. Граничные условия (жесткого защемления у меньшего основания конуса, шарнирного опирания у большого основания) при расчете были следующими ($x^1=s$; $x^2=\varphi$): $u=v=w=\gamma_s=\gamma_\varphi=0$ при $s=L$ и $u=v=w=0$ при $s=0$. При потере устойчивости оболочки в виде усеченного конуса формы выпучивания неосесимметричны по окружности и характеризуются числом волн n . Поэтому расчет методом конечных элементов можно проводить для сектора π/n с граничными условиями на образующих $v=\gamma_\varphi=0$ при $\varphi=0, \pi/n$. На рис. 6.13 показана разбивка $N=3$. Результаты расчета критической нагрузки с применением элемента CAU2W30 сравнивались с результатами расчета с применением осесимметричного элемента CAU3W20 при разбивке на 10 конечных элементов по длине, а также с результатами решения этой задачи методом конечных разностей для изотропной оболочки [14] (табл. 6.7). В последнем случае критическая нагрузка рассчитывалась при условии безмоментного докритического состояния, поэтому она несколько завышена. При расчете

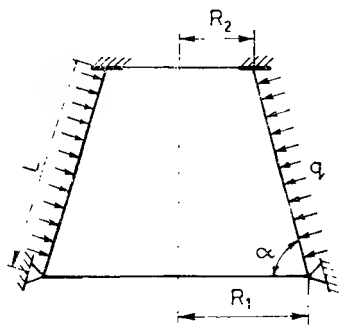


Рис. 6.12. Оболочка в виде усеченного конуса

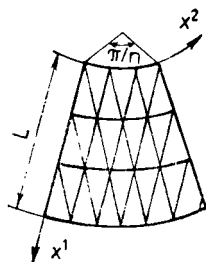


Рис. 6.13. Разбивка оболочки на конечные элементы

Таблица 6.7

Критические нагрузки оболочки в виде усеченного конуса
при различном числе волн по окружности

Число волн по окруж- ности n	$CAU2W30$ ($N=3$)	$CAU3W20$ ($N=10$)	Метод конеч- ных разностей [14]
2	8,50	—	—
3	7,84	—	—
4	7,12	—	8,65
5	7,17	9,98	—
6	7,44	8,58	—
7	—	8,76	—
8	—	9,57	—

критической нагрузки методом конечных элементов кроме поперечных сдвигов учитывалась также моментность докритического состояния.

В данной задаче значительно экономичнее применять осесимметричный конечный элемент оболочки вращения. Однако двумерный элемент $CAU2W30$ может применяться в задачах устойчивости оболочек вращения при любых неосесимметричных нагрузках, а также при расчете критических нагрузок произвольных оболочек.

6.6. НЕЛИНЕЙНОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ОБОЛОЧЕК

Многие задачи деформирования тонкостенных оболочек не могут быть решены на основе соотношений линейной теории оболочек. Для оболочек из жестких линейно-упругих материалов нелинейный анализ необходим при исследовании потери устойчивости и послекритического поведения. Линеаризованный подход в задачах устойчивости не может дать полное представление о деформировании оболочки в послекритическом состоянии и о причинах снижения критических нагрузок реальных конструкций. Определенные на основе линеаризованного подхода критические нагрузки в некоторых случаях оказываются завышенными. Тем не менее во многих случаях критические нагрузки, определенные по линеаризованной теории, близки к реальным критическим нагрузкам оболочек.

В настоящее время нелинейный анализ на основе метода конечных элементов получил широкое распространение в решении самых разнообразных задач деформирования оболочек. При этом в большинстве случаев схема решения строится на основе вариационного принципа Лагранжа и его модификаций

или на основе принципа возможных перемещений. Это обусловлено тем, что в методе перемещений схема решения нелинейных задач оказывается наиболее простой. Метод перемещений в геометрически нелинейном анализе оболочек применен в работах [10, 29, 86, 87, 89, 90, 98, 113, 171 и др.], где проведен как докритический нелинейный анализ оболочек, так и после-критический анализ с переходом через предельные точки.

В нелинейном анализе необходимо решить несколько проблем. Это, во-первых, определение состояний равновесия конструкции, во-вторых, выявление устойчивых и неустойчивых состояний равновесия и точек перехода от устойчивых состояний равновесия к неустойчивым, в-третьих, осуществление перехода через предельные точки. В последнем случае возникает ряд вычислительных проблем, связанных с сингулярностью матрицы тангенциальной жесткости в предельных точках. Все эти проблемы нашли отражение в алгоритмах решения нелинейных конечноэлементных задач [85, 90, 171 и др.].

6.6.1. Состояние равновесия

Будем считать, что для всех сил (внутренних и внешних) существует потенциал, а закрепления оболочки таковы, что при ее нелинейном деформировании имеется консервативная система. В этом случае принцип стационарности потенциальной энергии приводит к условию

$$\delta\Pi=0, \quad (6.6.1)$$

где $\Pi=U-W$ — полная потенциальная энергия конструкции; U — энергия деформаций, которая для пологих оболочек при определенных упрощениях определяется функционалом (3.4.3); W — работа внешних сил, которая определяется для каждого конкретного вида нагрузки.

При конечноэлементном представлении потенциальной энергии конструкции из условия (6.6.1) получаем нелинейные уравнения равновесия:

$$\Psi(\mathbf{d})=\mathbf{K}_s\mathbf{d}-\mathbf{F}=0. \quad (6.6.2)$$

Здесь $\mathbf{F}$ — вектор узловых сил; $\mathbf{K}_s$ — матрица секущей жесткости, которая будет определена далее. Эту матрицу можно представить как сумму двух матриц, одна из которых не зависит от перемещений:

$$\mathbf{K}_s=\mathbf{K}_0+\mathbf{K}_*, \quad (6.6.3)$$

где $\mathbf{K}_0$ — матрица жесткости для линейного анализа; $\mathbf{K}_*$ — матрица, зависящая от перемещений.

Решение системы нелинейных уравнений (6.6.2) осуществляется на основе линеаризации уравнения равновесия в окрестности текущего состояния. Это эквивалентно минимизации функционала, который получаем квадратичной аппроксимацией нелинейного функционала Π в окрестности состояния $\Pi_0(u_0, F_0)$:

$$\Pi(u_0 + \Delta u, F_0 + \Delta F) = \Pi_0 + \delta \Pi_0 + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi_0, \quad (6.6.4)$$

или

$$\Delta \Pi = \Pi - \Pi_0 = \delta \Pi_0 + \frac{1}{2} \delta^2 \Pi_0. \quad (6.6.5)$$

Если Π_0 — состояние равновесия (потенциальная энергия минимальна), то для перехода в новое состояние равновесия приращение потенциальной энергии должно быть минимальным:

$$\delta(\Delta \Pi) = 0. \quad (6.6.6)$$

Подставляя (6.6.5) в (6.6.6) и пренебрегая членами, которые выше квадратичных, в первом приближении получаем условие для определения истинных приращений Δu :

$$\delta^2 \Pi_0 = 0. \quad (6.6.7)$$

В конечноэлементном представлении условие (6.6.7) приводит к уравнению для определения приращений узловых перемещений:

$$K_T \Delta d = \Delta F. \quad (6.6.8)$$

Здесь $K_T = K_0 + K_N + K_u + K_R$ — матрица тангенциальной жесткости; K_N — матрица начальных напряжений, или геометрическая матрица жесткости; K_u — матрица больших перемещений; K_R — матрица начальных нагрузок. Определение этих матриц будет дано далее.

Решая систему линейных уравнений (6.6.8) для приращений

$$\Delta d_{(i)} = K_{T(i-1)}^{-1} \Delta F_{(i)}, \quad (6.6.9)$$

определяем приращения перемещений Δd на каждом i -м шаге по нагрузке, начиная от начального ненагруженного состояния. При этом в начале i -го шага вычисляется текущее значение матрицы $K_{T(i-1)}$. Такой алгоритм можно использовать только для начального участка нелинейного деформирования, так как с каждым шагом накапливается ошибка из-за неточного выполнения уравнения равновесия (6.6.2). Невязка $\Psi(d)$ растет с каждым шагом по мере удаления от начального ненагруженного состояния или от состояния равновесия Π_0 .

Для уменьшения невязки можно использовать простую коррекцию приращения нагрузки на i -м шаге прибавлением невязки в начале i -го шага:

$$\Delta \mathbf{d}_{(i)} = \mathbf{K}_{T(i-1)}^{-1} (\Delta \mathbf{F}_{(i)} + \alpha \Psi_{(i-1)}). \quad (6.6.10)$$

Здесь α — коэффициент коррекции.

При соответствующем выборе коэффициента α алгоритм (6.6.10) дает более точные результаты, чем алгоритм (6.6.9). Однако в общем случае деформирования возникают трудности правильного выбора этого коэффициента.

Состояние равновесия согласно (6.6.1) точно можно определить непосредственной минимизацией потенциальной энергии. Для этого проводится квадратичная аппроксимация потенциальной энергии в окрестности i -го состояния $\Pi(\mathbf{d}_{(i)})$. В конечно-элементом представлении аппроксимация (6.6.4) имеет следующий вид (далее опущены скобки в индексе, обозначающем состояние):

$$\begin{aligned} \Pi(\mathbf{d}) = & \mathbf{d}_i^T [\mathbf{K}_s(\mathbf{d}_i) \mathbf{d}_i - \mathbf{F}_i] + (\mathbf{d} - \mathbf{d}_i)^T [\mathbf{K}_s(\mathbf{d}_i) \mathbf{d}_i - \mathbf{F}_i] + \\ & + \frac{1}{2} (\mathbf{d} - \mathbf{d}_i)^T \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i) (\mathbf{d} - \mathbf{d}_i). \end{aligned} \quad (6.6.11)$$

Условие минимума квадратичной функции (6.6.11) приводит к уравнению

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{d}^T} = \Psi_i + \mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{d}_i = 0. \quad (6.6.12)$$

Здесь Ψ_i означает невязку уравнения (6.6.2) при перемещении $\mathbf{d}_i$:

$$\Psi_i = \mathbf{K}_s(\mathbf{d}_i) - \mathbf{F}_i.$$

В (6.6.12) введены также следующие обозначения:

$$\mathbf{K}_{Ti} = \mathbf{K}_T(\mathbf{d}_i); \quad \Delta \mathbf{d}_i = \mathbf{d} - \mathbf{d}_i.$$

Решая систему линейных уравнений (6.6.12) относительно приращений $\Delta \mathbf{d}_i$, определяем их величину. Полные перемещения

$$\mathbf{d}_i^j = \mathbf{d}_i^{j-1} + \Delta \mathbf{d}_i^j \quad (6.6.13)$$

минимизируют потенциальную энергию Π в первом приближении. Далее снова проводится квадратичная аппроксимация потенциальной энергии согласно (6.6.11) и продолжается процесс уточнения потенциальной энергии для состояния равновесия. Этот итерационный процесс с учетом (6.6.12) и (6.6.13) можно записать в виде

$$\mathbf{d}_i^j = \mathbf{d}_i^{j-1} - (\mathbf{K}_{Ti}^{j-1})^{-1} \Psi_i^j. \quad (6.6.14)$$

Итерационный процесс по j в (6.6.14) заканчивается, когда евклидова норма приращения перемещений становится меньше заданной [85]:

$$\|\Delta d\| = \left[\frac{1}{r} \sum_{k=1}^r \left| \frac{\Delta d_k^j}{d_k^{i-1}} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon. \quad (6.6.15)$$

Здесь r — число степеней свободы по перемещениям; d_k^{i-1} — k -е перемещение в начале i -го шага по нагрузке.

Для сокращения времени счета в процессе итерации на одном шаге приращения нагрузки используется постоянная матрица K_T^0 , определенная в начале i -го шага. Процесс итерации в этом случае имеет следующий вид:

$$d_i^j = d_i^{j-1} - (K_{T_{i-1}}^0)^{-1} \Psi_i^j. \quad (6.6.16)$$

Схема (6.6.14) является схемой метода Ньютона для минимизации функции. Эта схема основана на ее квадратичной аппроксимации. Метод Ньютона для решения системы нелинейных уравнений на основе линейной аппроксимации функции Ψ имеет такую же схему итерации.

Таким образом, состояние равновесия при нелинейном деформировании конструкции определяется итерационным путем по соотношению (6.6.14). Для начального участка деформирования равновесные состояния можно определять решением линейной системы уравнений (6.6.8) для приращений. При этом на каждом шаге приращений нагрузки ΔF используется переменная матрица K_T .

6.6.2. Матрицы секущей и тангенциальной жесткости

Для определения матриц секущей и тангенциальной жесткости воспользуемся вариантом нелинейных кинематических соотношений (3.3.7), в которых нелинейные слагаемые учитываются только для мембранных деформаций. Для перехода на матричную запись вводим матрицы деформаций

$$\begin{aligned} \Omega_{(1)}^T &= \{\Omega_{(11)}^{(1)}, \Omega_{(22)}^{(1)}, 2\Omega_{(12)}^{(1)}\}; \\ \Omega_{(2)}^T &= \{\Omega_{(11)}^{(2)}, \Omega_{(22)}^{(2)}, 2\Omega_{(12)}^{(2)}\}; \\ k^T &= \{\chi_{(11)}, \chi_{(22)}, 2\chi_{(12)}\}; \\ \gamma^T &= \{2\Omega_{(13)}, 2\Omega_{(23)}, \Omega_{(33)}\}; \\ \Omega &= \Omega_{(1)} + \Omega_{(2)}. \end{aligned} \quad (6.6.17)$$

С учетом этих обозначений кинематические соотношения (3.3.7) в матричной записи имеют следующий вид ($\mathbf{u}^T = \{v_{(1)}, v_{(2)}, \omega, \gamma_{(1)}, \gamma_{(2)}, \gamma\}$):

$$\begin{aligned}\Omega_{(1)} &= \mathbf{L}_\Omega \mathbf{u}; & \mathbf{k} &= \mathbf{L}_k \mathbf{u}; \\ \gamma &= \mathbf{L}_\gamma \mathbf{u}; & \Omega_{(2)} &= \frac{1}{2} \omega_* \Phi.\end{aligned}\quad (6.6.18)$$

Здесь введены следующие обозначения (запятая означает частное дифференцирование по координатам x^1 и x^2) при допущении, что $a_{\alpha\beta} = \delta_{\beta}^{\alpha}$:

$$\omega_* = \begin{bmatrix} \omega_{,1} & 0 \\ 0 & \omega_{,2} \\ \omega_{,2} & \omega_{,1} \end{bmatrix} \Phi = \begin{bmatrix} \omega_{,1} \\ \omega_{,2} \end{bmatrix} \quad (6.6.19)$$

В соотношениях (6.6.18) матрицы операторов дифференцирования для линейных деформаций определяются обычным образом для каждой конкретной координатной системы. Подставляя аппроксимацию для перемещений (5.2.3) в (6.6.18), для элемента второго порядка ($n=6$) получаем

$$\begin{aligned}\Omega_{(1)} &= \mathbf{B}_\Omega \mathbf{d}_e; \\ \mathbf{k} &= \mathbf{B}_k \mathbf{d}_e; \\ \gamma &= \mathbf{B}_\gamma \mathbf{d}_e; \\ \Omega_{(2)} &= \frac{1}{2} \mathbf{B}_* \mathbf{d}_e.\end{aligned}\quad (6.6.20)$$

Здесь

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_\Omega &= \mathbf{L}_\Omega \mathbf{N}; & \mathbf{B}_k &= \mathbf{L}_k \mathbf{N}; \\ \mathbf{B}_\gamma &= \mathbf{L}_\gamma \mathbf{N}; & \mathbf{B}_* &= \omega_* \Phi,\end{aligned}\quad (6.6.21)$$

где матрица Φ связывает матрицу поворотов Φ и матрицу узловых перемещений зависимостью

$$\Phi = \Phi \mathbf{d}_e. \quad (6.6.22)$$

Отметим, что матрица $\mathbf{B}_*$ зависит от перемещений, поэтому вариация нелинейных деформаций (6.6.20) с учетом (6.6.21) имеет вид

$$\delta \Omega_{(2)} = \mathbf{B}_* \delta \mathbf{d}_e. \quad (6.6.23)$$

Функционал энергии деформаций (3.4.3) в матричной записи с учетом обозначений (6.6.17) имеет вид

$$U_e = \frac{1}{2} \iint_{S_e} \{\mathbf{N}^T \Omega + \mathbf{M}^T \mathbf{k} + \mathbf{Q}^T \gamma\} dS. \quad (6.6.24)$$

Здесь введены следующие обозначения для матриц усилий и моментов:

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^T &= \{N_{(11)}, N_{(22)}, N_{(12)}\}; \\ \mathbf{M}^T &= \{M_{(11)}, M_{(22)}, M_{(12)}\}; \\ \mathbf{Q}^T &= \{Q_{(1)}, Q_{(2)}, N_{(33)}\}. \end{aligned} \quad (6.6.25)$$

С учетом обозначений (6.6.17) и (6.6.25) физические соотношения (1.5.8) могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \mathbf{Q}_N \boldsymbol{\Omega} + \mathbf{B} \mathbf{k}; \quad \mathbf{M} = \mathbf{D}_k \mathbf{k} + \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega}; \\ \mathbf{Q} &= \mathbf{Q}_Q \boldsymbol{\gamma}. \end{aligned} \quad (6.6.26)$$

Здесь матрицы $\mathbf{Q}_N$, $\mathbf{Q}_Q$ содержат мембранные жесткости оболочки Q_{ij} , матрица $\mathbf{B}$ — мембранно-изгибные жесткости B_{ij} и матрица $\mathbf{D}_k$ — изгибные жесткости D_{ij} .

Функционал потенциальной энергии конечного элемента определяется разностью функционалов (6.6.24) и (5.2.25):

$$\Pi_e = U_e - W_e. \quad (6.6.27)$$

Отметим, что в данном случае этот функционал не квадратичный, так как энергия деформаций (6.6.24) зависит от нелинейных деформаций.

Подставляя физические соотношения (6.6.26) и кинематические соотношения (6.6.20) в (6.6.27), из условия стационарности функционала $\delta \Pi_e = 0$ получаем уравнение равновесия вида (6.6.2)

$$\mathbf{K}_s^e \mathbf{d}_e - \mathbf{F}_e = 0. \quad (6.6.28)$$

Здесь $\mathbf{K}_s^e$ — матрица секущей жесткости конечного элемента:

$$\mathbf{K}_s^e = \mathbf{K}_0^e + \mathbf{K}_*^e, \quad (6.6.29)$$

где $\mathbf{K}_0^e$ — матрица жесткости для линейных деформаций:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_0^e = \iint_{S_e} \{ & \mathbf{B}_\Omega^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_\Omega + \mathbf{B}_k^T \mathbf{B} \mathbf{B}_\Omega + \\ & + \mathbf{B}_k^T \mathbf{D}_k \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_\Omega^T \mathbf{B} \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_\gamma^T \mathbf{Q}_Q \mathbf{B}_\gamma \} dS. \end{aligned} \quad (6.6.30)$$

Легко проверить, что эта матрица совпадает с матрицей (5.2.17). В (6.6.29) $\mathbf{K}_*^e$ является матрицей, которая зависит от перемещений:

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_*^e = \iint_{S_e} \{ & \mathbf{B}_\Omega^T \mathbf{Q}_N \frac{1}{2} \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_*^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_\Omega + \\ & + \mathbf{B}_*^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_*^T \mathbf{B} \mathbf{B}_k + \mathbf{B}_k^T \mathbf{B} \frac{1}{2} \mathbf{B}_* \} dS. \end{aligned} \quad (6.6.31)$$

Матрица тангенциальной жесткости K_T^e определяется через вторую вариацию потенциальной энергии:

$$\delta^2\Pi_e = \delta\mathbf{d}_e^T K_T^e \delta\mathbf{d}_e. \quad (6.6.32)$$

В случае, когда внешние силы не зависят от перемещений, $\delta^2 W_e = 0$ и $\delta^2\Pi_e = \delta^2 U_e$. В некоторых случаях нагружения, например при нагружении внешним давлением, нагрузка зависит от деформаций и $\delta^2 W_e \neq 0$. При определенных граничных условиях и в этом случае существует потенциал внешней нагрузки и имеется консервативная система, для которой применим принцип стационарности потенциальной энергии. Учет данного слабого порождает матрицу начальных нагрузок K_R^e , которая является несимметричной, в связи с чем матрица K_T в (6.6.8) и (6.6.32) также является несимметричной.

Исследования показали, что при нагружении оболочек внешним давлением и при умеренных перемещениях влиянием матрицы K_R^e можно пренебречь, поэтому принимаем $K_R^e = 0$, т. е. $\delta^2\Pi_e = \delta^2 U_e$.

При вычислении второй вариации энергии деформаций (6.6.24) необходимо получить следующее выражение:

$$\begin{aligned} \delta^2\Omega_{(2)}^T \mathbf{N} = & N_{(11)}\delta\omega_{,1}\delta\omega_{,1} + N_{(22)}\delta\omega_{,2}\delta\omega_{,2} + \\ & + 2N_{(12)}\delta\omega_{,1}\delta\omega_{,2} = \delta\mathbf{d}_e^T \Phi^T \mathbf{N}_* \Phi \delta\mathbf{d}_e. \end{aligned} \quad (6.6.33)$$

Здесь использована зависимость (6.6.22) и введено следующее обозначение для матрицы начальных усилий:

$$\mathbf{N}_* = \begin{bmatrix} N_{(11)} & N_{(12)} \\ N_{(12)} & N_{(22)} \end{bmatrix} \quad (6.6.34)$$

Вторая вариация энергии деформаций с учетом (6.6.20), (6.6.23) и (6.6.33) приводит к соотношению

$$\delta^2\Pi_e = \delta^2 U_e = \delta\mathbf{d}_e^T K_T^e \delta\mathbf{d}_e. \quad (6.6.35)$$

Здесь $K_T^e = K_0^e + K_N^e + K_u^e$, где матрица K_0^e определена соотношениями (6.6.30); K_N^e — матрица начальных напряжений, или матрица геометрической жесткости; K_u^e — матрица больших перемещений. Эти матрицы определяются следующим образом:

$$K_N^e = \iint_{S_e} \Phi^T \mathbf{N}_* \Phi dS; \quad (6.6.36)$$

$$\begin{aligned} K_u^e = & \iint_{S_e} \{ \mathbf{B}_*^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_h^T \mathbf{B} \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_*^T \mathbf{B} \mathbf{B}_h + \\ & + \mathbf{B}_\Omega^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_* + \mathbf{B}_*^T \mathbf{Q}_N \mathbf{B}_\Omega \} dS. \end{aligned} \quad (6.6.37)$$

Отметим, что в (6.6.36) начальные усилия определяются с учетом нелинейного деформирования оболочки:

$$N = \left\{ Q_N \left(B_\Omega + \frac{1}{2} B_* \right) + B B_k \right\} d_c. \quad (6.6.38)$$

Таким образом, для решения задач нелинейного деформирования оболочек с помощью алгоритмов (6.6.9), (6.6.10), (6.6.14) или (6.6.16) получены все необходимые соотношения.

6.6.3. Численные примеры

Рассмотрим пример решения задачи нелинейного деформирования трансверсально-изотропной, защемленной по контуру цилиндрической панели, нагруженной внешним давлением q (рис. 6.14). Параметры материала и геометрии оболочки следующие: $h/R=1/800$; $h=3,175 \cdot 10^{-3}$ м; $R=2,54$ м; $L=0,254$ м; $\Theta=0,1$; $E_3=E=3,1 \cdot 10^3$ МПа; $\nu=0,3$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$.

При данном параметре пологости переход в закритическую стадию осуществляется по симметричной относительно центральной образующей форме [113]. Ввиду двойной симметрии задачи рассматривается 1/4 оболочки, которая имеет разбивку 4×4 , т. е. на 32 конечных элемента (см. рис. 6.14). Для линейной задачи с помощью оценок (см. приложение 3) при данной разбивке получаем погрешность энергии менее 5%. Различные решения этой задачи для перемещения в центре оболочки изображены на рис. 6.15. Кривая 1 соответствует линейному решению с критической нагрузкой по линеаризованной теории устойчивости $\bar{q}_* = 8,4$; кривые 2 и 3 соответствуют решениям по алгоритму (6.6.9) с автоматическим выбором шага по нагрузке (нагрузка выбиралась по приращению перемещения в точке С, $\Delta w_c \leq h/5$ для кривой 2; $\Delta w_c \leq h/10$ для кривой 3); кривая 4 отражает решение с использованием функционала Лагранжа в приращениях [89]; кривая 5 отражает решение, полученное методом Ньютона [130]. Ряд других исследователей также использовали этот пример в качестве тестовой задачи; полученные ими результаты по различным алгоритмам и с использованием различных конечных элементов лежат между кривыми 4 и 5. Получен также начальный участок деформирования, полностью совпадающий с кривой 3 [86].

Как видно из рис. 6.15, алгоритм (6.6.9) в данном примере не позволяет получить всю диаграмму деформирования. Вследствие нарастания невязки уравнения (6.6.2) накапливается ошибка определения перемещений, а в связи с этим и ошибка определения матрицы тангенциальной жесткости K_T . На участке диаграммы деформирования, где матрица K_T близка к сингулярной, вследствие накопления ошибок в определении K_T

процесс решения расходится. В этом случае необходимо применять итерационные алгоритмы (6.6.14) или (6.6.16), основанные на минимизации невязки на каждом шаге приращения нагрузки. Поэтому данная задача решалась также с использованием алгоритма (6.6.16). Полученное решение практически совпадает с кривой 5.

В другом примере рассмотрена цилиндрическая панель (см. рис. 6.14) под равномерной вертикальной нагрузкой. Панель свободно оперта по контуру. Характеристики материала и геометрии оболочки следующие: $h/R=1/150$; $h=7,62 \cdot 10^{-2}$ м; $R=11,43$ м; $L=3,05$ м; $\Theta=0,133$; $E_3=E=2,1 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0$; $E/G_{13}=E/G_{23}=20$.

Решение этой задачи получено с использованием алгоритма (6.6.16). Перемещение центральной точки изображено на рис. 6.16. Полученная диаграмма деформирования и критическая нагрузка почти полностью совпадают с результатами работы [113].

Таким образом, используя шаговое нагружение и алгоритм (6.6.16), можно получить геометрические нелинейные решения как для систем, деформирующихся без потери устойчивости, так и для систем, теряющих устойчивость. Алгоритм (6.6.9) можно применять только для начального участка нелинейного деформирования.

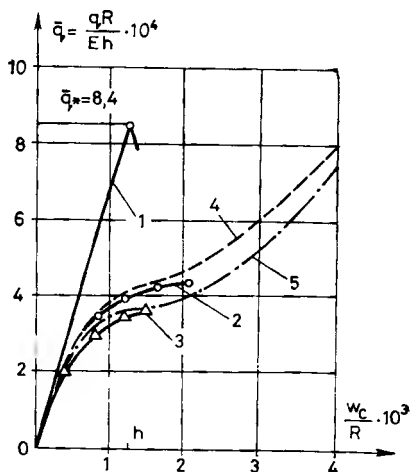
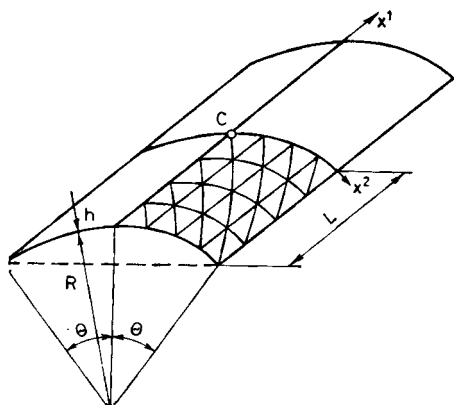


Рис. 6.14. Пологая цилиндрическая панель

Рис. 6.15. Результаты решения задачи нелинейного деформирования защемленной по контуру цилиндрической панели при внешнем давлении.

Пояснения см. в тексте

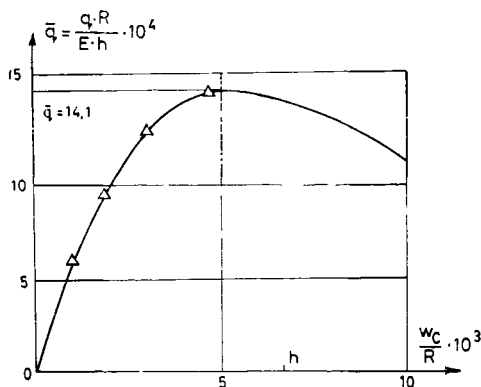


Рис. 6.16. Зависимость нагрузка—прогиб в центре для свободно опертой цилиндрической панели под действием вертикальной нагрузки

Отметим, что для перехода через предельные точки необходима модификация вышеприведенных алгоритмов. Некоторые модификации алгоритмов для этого случая рассмотрены в работах [85, 90, 113].

6.7. ЗАДАЧИ ИЗГИБА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Как уже было указано в параграфе 5.3, при изгибе однородных по толщине пластин в линейном приближении деформированное состояние пластины характеризуют три функции: прогиб w и повороты нормали γ_x и γ_y в направлении осей x и y соответственно. Следовательно, конечные элементы пластины имеют три степени свободы в i -м узле: w_i , γ_x^i и γ_y^i .

Рассматривая семейство треугольных конечных элементов пластины, имеем: для элемента первого порядка (число узлов $n=3$) матрица жесткости имеет 9 степеней свободы, для элемента второго порядка ($n=6$) — 18 степеней свободы, а для элемента третьего порядка ($n=10$) — 30 степеней свободы. Примеры применения треугольного элемента первого порядка рассмотрены в работе [50]. Далее будут рассмотрены примеры применения элемента второго порядка $PL2W18$ в задачах изгиба, а в параграфе 6.8 — в задачах колебаний.

Рассматривались четыре вида граничных условий на контуре пластин: жесткое защемление (C), свободное опирание (S), свободное опирание с ограничением поворота нормали по касательной к контуру (SI) и свободный край (F). Для жесткого защемления (C) имеем следующие граничные условия:

$$w = \gamma_x = \gamma_y = 0. \quad (6.7.1)$$

Для свободного опирания (S) имеем следующее граничное условие:

$$w=0. \quad (6.7.2)$$

Для свободного опирания с ограничением поворота нормали по касательной к контуру ($S1$) имеем следующие главные граничные условия:

$$\begin{aligned} w=0; \quad \gamma_y=0 \quad \text{при} \quad x=\text{const}; \\ w=0; \quad \gamma_x=0 \quad \text{при} \quad y=\text{const}. \end{aligned} \quad (6.7.3)$$

На свободном крае (F) все граничные условия являются естественными. Кроме того, если граничные условия и нагрузки симметричны, то решение задачи можно проводить для одной симметричной части пластины, подставляя на осях симметрии следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \gamma_x=0 \quad \text{при} \quad x=0; \\ \gamma_y=0 \quad \text{при} \quad y=0. \end{aligned} \quad (6.7.4)$$

6.7.1. Изгиб пластины под действием равномерно распределенной нагрузки

Рассмотрим решение задачи изгиба квадратной пластины ($a=b$) под действием равномерно распределенной нагрузки q при двух видах граничных условий на контуре пластины: S (6.7.2) и $S1$ (6.7.3). Ввиду симметрии нагрузки и граничных условий решение можно проводить для $1/4$ пластины с использованием граничных условий (6.7.4) на осях симметрии. Разбивка на конечные элементы при $N=2$ показана на рис. 6.17. Результаты решения с применением конечного элемента $PL2W18$ приведены в табл. 6.8.

Сравниваются прогиб в центре w_c^T и изгибающий момент M_x^T в точке $x=y=0,125a$, полученные по теории типа Тимошенко, и соответствующие величины w_c^K и M_x^K , полученные по

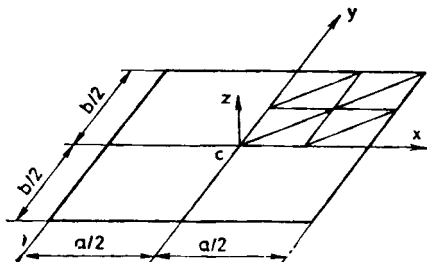


Рис. 6.17. Разбивка прямоугольной пластины на конечные элементы

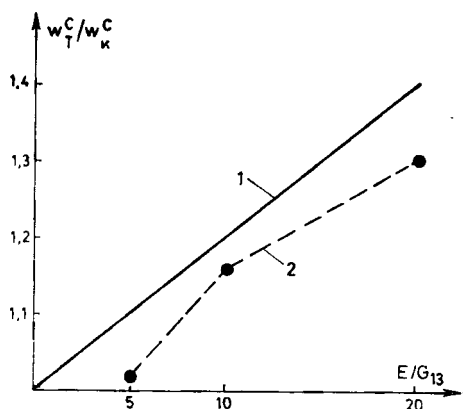


Рис. 6.18. Влияние поперечного сдвига на прогиб при $h/a=0,1$:
1 — аналитическое решение [6];
2 — решение МКЭ при $N=4$

классической теории [77]. В качестве аналитического решения, учитывающего поперечные сдвиги, использовано решение [6], которое дает несколько завышенные (2—3%) результаты по сравнению с аналитическим решением по теории типа Тимошенко. Влияние поперечного сдвига на прогиб показано на рис. 6.18.

Из табл. 6.8 видно, что для толстых изотропных ($h/a=0,2$) или анизотропных ($E/G_{13} \geq 5$) пластин прогиб, полученный методом конечных элементов, сходится к точному значению снизу. Для изотропных пластин средней толщины ($h/a=0,14$) конечный элемент PL2W18 без применения сокращенного интегрирования дает заниженные значения прогибов, т. е. сказывается эффект искусственного увеличения жесткости пластины.

Таблица 6.8
Результаты решения задачи изгиба квадратной свободно опертой пластины под действием распределенной нагрузки

Граничные условия	h/a	$E/G_{12} = E/G_{23}$	Прогиб в центре* w_T^C/w_K^C			Моменты в точке $x=y=0,125a^{**}$ $M_{xx}^T/M_{xx}^K = M_{yy}^T/M_{yy}^K$	
			PL2W18		Аналитическое решение [6]	PL2W18	
			N=2	N=4		N=2	N=4
SI	0,14	2,6	0,879	0,919	1,102	1,000	1,046
S	0,14	2,6	0,956	0,994	1,102	1,072	1,124
SI	0,1	5	0,984	1,018	1,099	1,137	1,198
SI	0,1	10	1,123	1,158	1,199	1,226	1,291
SI	0,1	20	1,268	1,302	1,399	1,241	1,311
S	0,2	2,6	1,102	1,124	1,207	1,111	1,220

* По классической теории [77] $w_K^C = 0,00406 qa^4/D$.

** По классической теории [77] $M_{xx}^K = M_{yy}^K = 0,0459qa^2$.

Для изгибающего момента выбрана не центральная, а близкая к центру пластины точка с координатами $x=y=0,125a$. Сходимость (монотонную) для внутренних сил лучше исследовать во внутренних узлах области. Как видно, изгибающий момент также сходится снизу. При этом по теории типа Тимошенко изгибающий момент на 5—30% больше в зависимости от относительной толщины пластины и модуля поперечного сдвига, чем по классической теории. При увеличении толщины пластины и отношения E/G_{13} изгибающий момент увеличивается по сравнению с полученным по классической теории. Интересно отметить, что при сравнении граничных условий S и $S1$ изгибающий момент в последнем случае меньше. При этом при граничных условиях $S1$ на контуре пластины при одинаковой разбивке более точно выполняются главные граничные условия, т. е. изгибающие моменты ближе к нулю.

Таким образом, конечный элемент $PL2W18$ без сокращенного интегрирования можно применять при расчете толстых изотропных ($h/a \geq 0,20$) или анизотропных ($E/G_{13} \geq 5$) пластин средней толщины.

6.7.2. Изгиб прямоугольной пластины с вырезом

Рассмотрим задачу изгиба защемленной по контуру квадратной пластины с симметричным квадратным вырезом под действием равномерно распределенной нагрузки (рис. 6.19). Ввиду

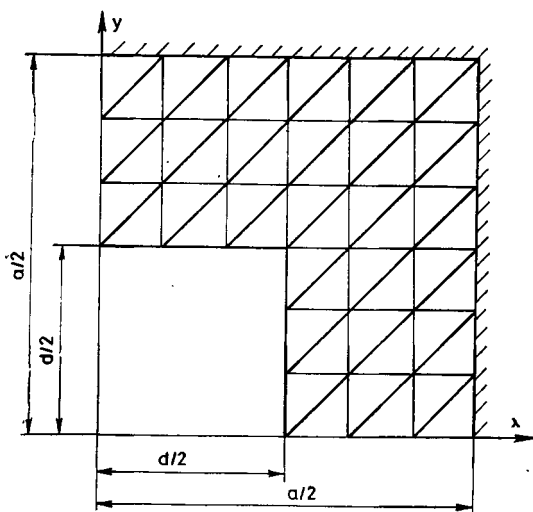


Рис. 6.19. Прямоугольная пластина с вырезом

симметрии нагрузки и геометрии пластины можно рассматривать 1/4 конструкции со следующими граничными условиями:

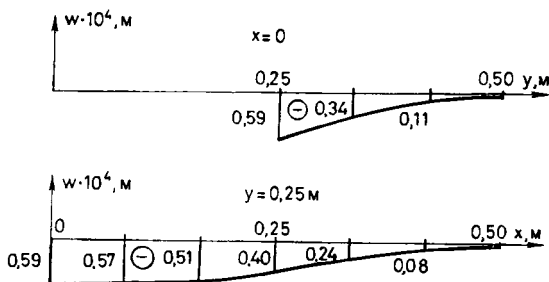
$$w = \gamma_x = \gamma_y = 0 \quad \text{при} \quad x = \pm a/2;$$

$$w = \gamma_x = \gamma_y = 0 \quad \text{при} \quad y = \pm b/2;$$

$$\gamma_x = 0 \quad \text{при} \quad x = 0;$$

$$\gamma_y = 0 \quad \text{при} \quad y = 0.$$

а)



б)

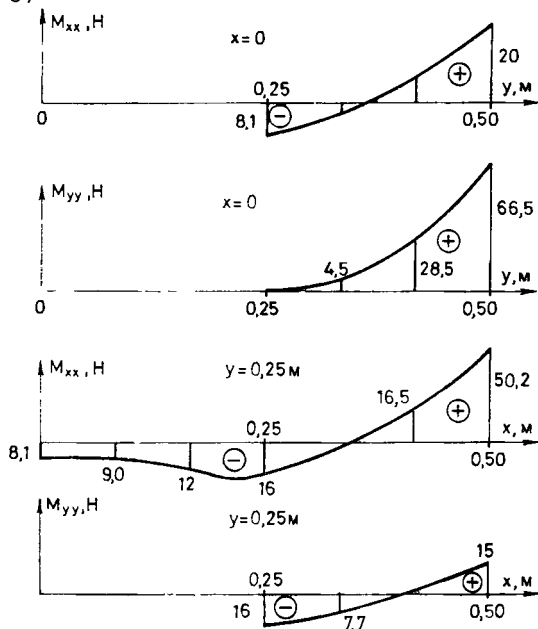


Рис. 6.20. Прогибы w (а) и изгибающие моменты M_{xx} и M_{yy} (б) в квадратной пластине с вырезом

Расчеты проведены для трансверсально-изотропной пластины при следующих параметрах: $a=b=0,5$ м; $d=0,25$ м; $h=0,01$ м; $E=0,5 \cdot 10^5$ МПа; $\nu=0,3$; $E/G_{13}=E/G_{23}=10$; $q=-10^6$ Па.

При решении использовалась разбивка ($N=6$) на 54 конечных элемента (см. рис. 6.19). Результаты решения в виде эпюр прогибов и моментов для характерных сечений показаны на рис. 6.20. Как видно, при использовании в расчете конечного элемента второго порядка *PL2W18* даже при относительно грубой разбивке на свободной кромке выреза достаточно хорошо выполняются естественные граничные условия ($M_x \approx 0$ при $x=d/2$; $M_y \approx 0$ при $y=d/2$).

6.8. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ПЛАСТИН

Рассматриваются колебания прямоугольной пластины (см. рис. 6.17) при граничных условиях жесткого защемления *C* (6.7.1) по всему контуру. При симметричных формах колебаний решение можно проводить для 1/4 пластины с граничными условиями (6.7.4) на осях симметрии. Результаты решения (минимальная частота ω_T^C) при разбивке $N=2,4$ для 1/4 трансверсально-изотропной квадратной пластины толщиной $h/a=0,1$ при различных отношениях продольного модуля упругости к модулю поперечного сдвига отнесены к фундаментальной частоте свободно опертой (*S*) пластины, полученной по классической теории, ω_K^S , а ω_K^C — фундаментальная частота защемленной пластины, полученная по классической теории (табл. 6.9).

Для сравнения приведены результаты других исследователей: решение МКЭ с четырехугольным конечным элементом при разбивке $N=8$ на 1/4 пластины [100] и полуаналитическое решение методом конечных полос*, которое можно считать точным.

Таблица 6.9

Минимальная частота собственных колебаний защемленной по контуру квадратной пластины при $h/a=0,1$ и $\nu=0,3$

$E \cdot G_{13} = E \cdot G_{23}$	$\lambda = \omega_T^C / \omega_K^S; \omega_{1,S} = 2\pi^2 / a^2 \sqrt{Eh^2 / 12\rho(1-\nu^2)}$				$\lambda = \omega_K^C / \omega_K^S$	$\varphi = \frac{\omega_T^C (N=4)}{\omega_K^C}$
	PL2W18		МКЭ [100] N=8	Метод конеч- ных полос		
	N=2	N=4				
2,6	1,859	1,796	1,680	1,640	1,823	0,985
5	1,737	1,689	—	—		0,926
10	1,614	1,573	—	—		0,863
20	1,849	1,455	—	—		0,798

* См.: Ganesan N., Dhatarad M. S. Vibration analysis of Mindlin plates. — J. Sound and Vibration, 1983, vol. 87, N 4, p. 643—645.

В обоих случаях при расчете использовался коэффициент сдвига $k=\pi^2/12$, а в нашем случае — $k=5/6$. В последнем столбце табл. 6.9 показано снижение фундаментальной частоты за счет влияния поперечных сдвигов. Отметим, что результаты получены без применения сокращенного интегрирования, поэтому частота изотропной оболочки при $E/G_{13}=2,6$ получается несколько завышенной.

Таким образом, конечный элемент *PL2W18* без сокращенного интегрирования можно применять для расчета частот толстых изотропных ($h/a \geq 0,1$) или анизотропных ($E/G_{13} \geq 5$) пластин средней толщины.

6.9. ЭФФЕКТИВНАЯ ЖЕСТКОСТЬ И НЕСУЩАЯ СПОСОБНОСТЬ ОБОЛОЧЕК ИЗ СЕТЧАТОГО КОМПОЗИТНОГО МАТЕРИАЛА

При проектировании оболочек в качестве несущих элементов различных конструкций важным показателем их качества является масса. Стремление уменьшить массу конструкции привело не только к усовершенствованию методов расчета, но и к созданию новых материалов, в частности композитных. Преимущество применения композитных материалов состоит не только в их высших удельных характеристиках, но и в возможности управлять их структурой для создания материалов и конструкций с требуемыми свойствами.

Как известно, в настоящее время в классе несущих оболочек из композитных материалов чаще всего используются оболочки слоистой структуры, изготовленные намоткой. Однако улучшение характеристик таких оболочек имеет свои пределы. Одна из возможностей такого улучшения состоит в изготовлении оболочек пространственно-сетчатой структуры, обшивку которых (многослойную) подпирают весьма часто расположенные ребра. На рис. 6.21 показаны два возможных типа ячеек пространственной структуры для цилиндрических оболочек. Первая структура (см. рис. 6.21,а) образуется из спиральных ребер под углом $\pm \varphi_p$ к направлению образующей оболочки. Вторая структура (см. рис. 6.21,б) дополнена ребрами в окружном направлении. В принципе расчет подобной оболочки можно проводить методом суперэлементов так, как изложено в параграфе 6.4. Однако при такой методике расчета число суперэлементов в реальной конструкции может быть довольно большим. Поэтому при определении интегральных характеристик оболочек (прогибов, критических нагрузок для общей формы потери устойчивости, частот собственных колебаний) можно использовать расчет по эффективным характеристикам жесткости материала. В этом расчете оболочка пространственно-сетчатой структуры заменяется квазиоднородной оболочкой, для кото-

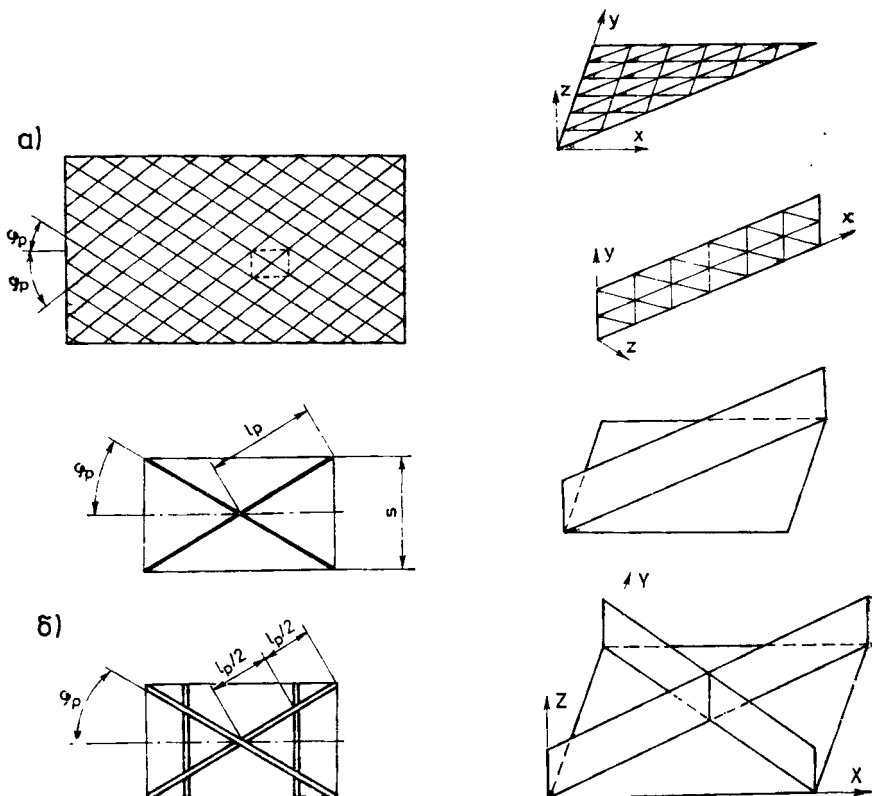


Рис. 6.21. Типы ячеек сетчатой структуры.

Пояснения см. в тексте

Рис. 6.22. Формирование типовой ячейки из базовых конечных элементов

рой должны определяться эффективные характеристики: мембранная, мембранно-изгибная и изгибная жесткость.

Для определения эффективных характеристик могут быть использованы различные модели. Один из способов получения эффективных характеристик заключается в решении методом конечных элементов задачи деформирования характерной ячейки сетчатого композита. Эффективные характеристики определяются энергетическим усреднением. При этом в первом приближении можно пренебречь искривлением и рассматривать плоскую сетчатую структуру.

Для решения задачи используется плоский аналог оболочечного конечного элемента второго порядка CAU2W36, матрица жесткости которого определяется формулой (5.2.17) при $n=6$. В качестве координатной системы, в которой определяется мат-

рица жесткости элемента, используется локальная декартова система координат x, y, z , как и для изгибаемой пластины в параграфе 5.3. Формирование типовой ячейки для пространственно-сетчатой структуры (см. рис. 6.21, а) показано на рис. 6.22. Эффективная жесткость типовой ячейки определяется в глобальной декартовой системе координат X, Y, Z . Локальная система координат обшивки x, y, z совпадает с глобальной системой координат. При вычислении матрицы жесткости конечного элемента для ребра в глобальной системе координат необходимо использовать матрицу трансформаций T :

$$\tilde{K}_e = T^T K_e T. \quad (6.9.1)$$

Здесь $\tilde{K}_e$ — матрица жесткости в глобальной системе координат X, Y, Z ; K_e — матрица жесткости в локальной системе координат x, y, z .

Определение эффективной жесткости осуществляется по следующему алгоритму. Типовая ячейка рассматривается как макрооднородный элемент пластины с усредненными мембранной $\bar{Q}_{ij}$, мембранно-изгибной $\bar{B}_{ij}$ и изгибной $\bar{D}_{ij}$ жесткостью. Усилия ($\bar{N}_{xx}, \bar{N}_{yy}, \bar{N}_{xy}, \bar{M}_{xx}, \bar{M}_{yy}, \bar{M}_{xy}, \bar{Q}_x, \bar{Q}_y, \bar{N}_{zz}$) и деформации ($\bar{E}_{xx}, \bar{E}_{yy}, 2\bar{E}_{xy}, \bar{K}_{xx}, \bar{K}_{yy}, 2\bar{K}_{xy}, 2\bar{E}_{xz}, 2\bar{E}_{yz}, \bar{E}_{zz}$) макрооднородного элемента постоянны в пределах типовой ячейки. Типовая ячейка имеет две плоскости симметрии, поэтому физические соотношения между усредненными усилиями и деформациями могут быть записаны в виде

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_x \\ \bar{Q}_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{55} & 0 \\ 0 & \bar{Q}_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 2\bar{E}_{xz} \\ 2\bar{E}_{yx} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{Bmatrix} \bar{N}_{xx} \\ \bar{N}_{yy} \\ \bar{N}_{zz} \\ \bar{N}_{xy} \\ \bar{M}_{xx} \\ \bar{M}_{yy} \\ \bar{M}_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 \\ \bar{Q}_{21} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & 0 \\ \bar{Q}_{31} & \bar{Q}_{32} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} & 0 & 0 & \bar{B}_{66} \\ \bar{B}_{11} & \bar{B}_{12} & 0 & 0 & \bar{D}_{11} & \bar{D}_{12} & 0 \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & 0 & 0 & \bar{D}_{21} & \bar{D}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{B}_{66} & 0 & 0 & \bar{D}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{E}_{xx} \\ \bar{E}_{yy} \\ \bar{E}_{zz} \\ 2\bar{E}_{xy} \\ \bar{K}_{xx} \\ \bar{K}_{yy} \\ 2\bar{K}_{xy} \end{Bmatrix} \quad (6.9.2)$$

Эффективные характеристики определяются решением задачи для девяти деформированных состояний. В каждом из деформированных состояний для типовой ячейки по формуле (5.2.16) вычисляется энергия микродеформаций

$$U_* = \frac{1}{2} \sum_e d_e^T \tilde{K}_e d_e. \quad (6.9.3)$$

Здесь суммирование производится по всем конечным элементам типовой ячейки.

Энергия деформаций типовой ячейки определяется также через усредненные усилия и деформации:

$$U_{**} = \frac{1}{2} \iint_{S_*} \{ \bar{N}_{xx} \bar{E}_{xx} + \bar{N}_{yy} \bar{E}_{yy} + 2\bar{N}_{xy} \bar{E}_{xy} + \\ + \bar{N}_{zz} \bar{E}_{zz} + \bar{M}_{xx} \bar{K}_{xx} + \bar{M}_{yy} \bar{K}_{yy} + 2\bar{M}_{xy} \bar{K}_{xy} + \\ + 2\bar{Q}_x \bar{E}_{xz} + 2\bar{Q}_y \bar{E}_{yz} \} dS. \quad (6.9.4)$$

Здесь $S_* = \frac{1}{2} l_p^2 \sin 2\varphi_p$ — площадь в плоскости XY типовой ячейки.

Всего для типовой ячейки имеется девять независимых деформированных состояний. Для этих состояний (рис. 6.23) методом конечных элементов решаются задачи определения напряженно-деформированного состояния в конечных элементах типовой ячейки. При этом для каждого деформированного состояния задаются макродеформации: 1 — $\bar{E}_{xx}$; 2 — $\bar{E}_{yy}$; 3 — $\bar{K}_{xx}$; 4 — $\bar{K}_{yy}$; 5 — $2\bar{E}_{xy}$; 6 — $2\bar{K}_{xy}$; 7 — $2\bar{E}_{xz}$; 8 — $2\bar{E}_{yz}$; 9 — $\bar{E}_{zz}$.

После решения этих задач каждый раз по формуле (6.9.3) вычисляется энергия микродеформаций U_* и с учетом (6.9.2) по формуле (6.9.4) определяется энергия макродеформаций U_{**} . Приравнявая обе энергии деформаций, получаем систему уравнений для определения эффективных характеристик:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} S_* \bar{Q}_{11} \bar{E}_{xx}^2 &= U_*^1; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{Q}_{22} \bar{E}_{yy}^2 &= U_*^2; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{D}_{11} \bar{K}_{xx}^2 &= U_*^3; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{D}_{22} \bar{K}_{yy}^2 &= U_*^4; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{Q}_{66} (2\bar{E}_{xy})^2 &= U_*^5; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{D}_{66} (2\bar{K}_{xy})^2 &= U_*^6; \\ \frac{1}{2} S_* \bar{Q}_{55} (2\bar{E}_{xz})^2 &= U_*^7; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} S_* \tilde{Q}_{44} (2\tilde{E}_{YZ})^2 &= U^*_{8}; \\
\frac{1}{2} S_* \tilde{Q}_{33} \tilde{E}_{ZZ}^2 &= U^*_{9}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{11} \tilde{E}_{XX}^2 + 2\tilde{Q}_{12} \tilde{E}_{XX} \tilde{E}_{YY} + \tilde{Q}_{22} \tilde{E}_{YY}^2) &= U^*_{1+2}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{D}_{11} \tilde{K}_{XX}^2 + 2\tilde{D}_{12} \tilde{K}_{XX} \tilde{K}_{YY} + \tilde{D}_{22} \tilde{K}_{YY}^2) &= U^*_{3+4}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{11} \tilde{E}_{XX}^2 + 2\tilde{B}_{11} \tilde{K}_{XX} \tilde{E}_{XX} + \tilde{D}_{11} \tilde{K}_{XX}^2) &= U^*_{1+3}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{22} \tilde{E}_{YY}^2 + 2\tilde{B}_{12} \tilde{K}_{XX} \tilde{E}_{YY} + \tilde{D}_{11} \tilde{K}_{XX}^2) &= U^*_{2+3}; \\
\frac{1}{2} S_* [\tilde{Q}_{66} (2\tilde{E}_{XY})^2 + 8\tilde{B}_{66} \tilde{E}_{XY} \tilde{K}_{XY} + \tilde{D}_{66} (2\tilde{K}_{XY})^2] &= U^*_{5+6}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{22} \tilde{E}_{YY}^2 + 2\tilde{B}_{22} \tilde{E}_{YY} \tilde{K}_{YY} + \tilde{D}_{22} \tilde{K}_{YY}^2) &= U^*_{2+4}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{11} \tilde{E}_{XX}^2 + 2\tilde{Q}_{13} \tilde{E}_{XX} \tilde{E}_{ZZ} + \tilde{Q}_{33} \tilde{E}_{ZZ}^2) &= U^*_{1+9}; \\
\frac{1}{2} S_* (\tilde{Q}_{22} \tilde{E}_{YY}^2 + 2\tilde{Q}_{23} \tilde{E}_{YY} \tilde{E}_{ZZ} + \tilde{Q}_{33} \tilde{E}_{ZZ}^2) &= U^*_{2+9}. \quad (6.9.5)
\end{aligned}$$

Здесь U^*_A — энергия микродеформаций в деформированном состоянии A ; U^*_{A+B} — энергия микродеформаций при совместном действии состояний A и B :

$$U^*_{A+B} = U^*_A + U^*_B + \sum_e \tilde{\mathbf{d}}_A^e T \tilde{\mathbf{K}}_e \tilde{\mathbf{d}}_B^e. \quad (6.9.6)$$

Здесь $\mathbf{d}_A^e$, $\mathbf{d}_B^e$ — узловые перемещения в состояниях A и B соответственно. При решении системы 17 уравнений (6.9.5) определяются все 17 неизвестных констант эффективной жесткости пространственно-сетчатого композита.

Полученные таким образом эффективные жесткости выше точных, так как энергия деформаций, полученная приближенным решением, выше точной энергии деформаций U_T :

$$U_* \geq U_T. \quad (6.9.7)$$

Поскольку в данном случае при решении задаются перемеще-

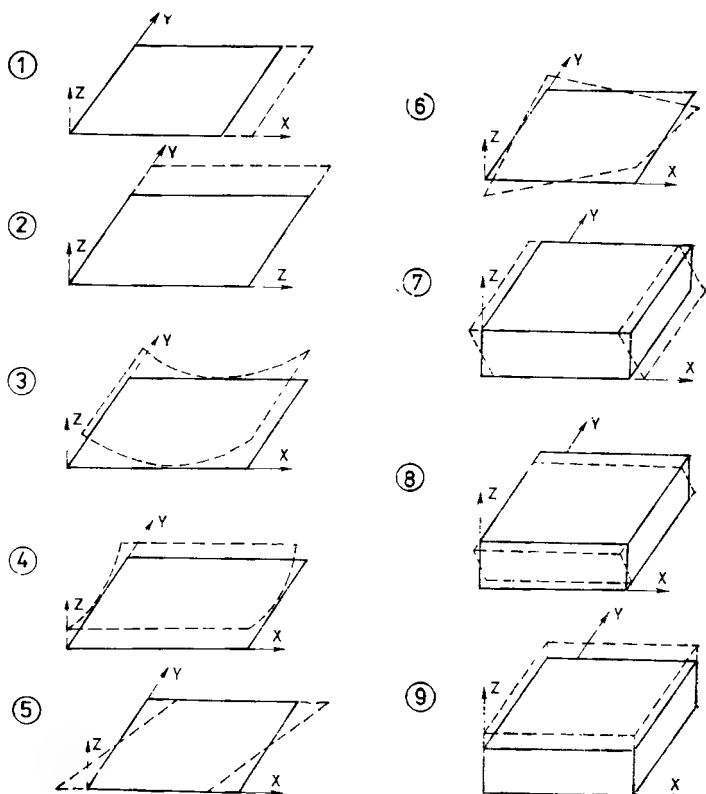


Рис. 6.23. Деформированные состояния типовой ячейки

ния на границе в отсутствие внешних сил, полная потенциальная энергия типовой ячейки равна энергии деформаций:

$$\Pi_* = U_*. \quad (6.9.8)$$

Так как согласно принципу минимума потенциальной энергии $\Pi_* \geq \Pi_T$, получаем неравенство (6.9.7). Из этого неравенства и уравнений (6.9.5) получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ii}^* &\geq \tilde{Q}_{ii}^T, \quad i = 1, 2, \dots, 6; \\ \tilde{D}_{kk}^* &\geq \tilde{D}_{kk}^T, \quad k = 1, 2, 6. \end{aligned} \quad (6.9.9)$$

Остальные коэффициенты эффективных жесткостей могут быть как больше, так и меньше точных, так как они определяются из смешанных уравнений (6.9.5).

Если для решения этой задачи применять вариационный принцип Кастильяно с использованием равновесных конечных

элементов, то полученные эффективные характеристики будут ниже точных.

На основании вышеизложенной методики подсчитаны эффективные характеристики композита, состоящего из обшивки толщиной h_0 и спиральных ребер высотой h_p и шириной b_p под углом $\pm\varphi_p$ к меридиану оболочки (см. рис. 6.21,а). Обшивка оболочки квазиоднородна по толщине и состоит из монослоев под углом $\pm\varphi_0$ к меридиану оболочки. Для второй структуры сетчатого композита кроме спиральных ребер имеются кольцевые ребра таких же размеров (см. рис. 6.21,б). Рассматривались два вида исходных однонаправленно армированных материалов, из которых изготовлены монослои обшивки и монослои ребра оболочки. Монослои (трансверсально-изотропные) первого материала (материал 1) имели следующие характеристики:

$$\begin{aligned} E_1 &= 2,3 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad E_2 = E_3 = 2450 \text{ МПа}; \quad \nu_{12} = 0,28; \\ G_{12} &= G_{13} = 2100 \text{ МПа}; \quad G_{23} = 2100 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (6.9.10)$$

Монослои второго материала (материал 2) имели следующие характеристики:

$$\begin{aligned} E_1 &= 1,334 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad E_2 = E_3 = 6000 \text{ МПа}; \quad \nu_{12} = 0,38; \\ G_{12} &= G_{13} = 3900 \text{ МПа}; \quad G_{23} = 3900 \text{ МПа}. \end{aligned} \quad (6.9.11)$$

Ось 1 направлена вдоль волокон (направление ребра или направление монослоя), оси 2 и 3 расположены в плоскости изотропии трансверсально-изотропного монослоя.

При изготовлении ребер относительное содержание монослоев в ребре $\theta = 0,5$, остальной объем ребра 1 — $\theta = 0,5$ занимает изотропное связующее с константами жесткости $E = 3500$ МПа; $\nu = 0,35$. По правилу смеси [36] получаем эффективные характеристики ребра (материал 3):

$$\begin{aligned} E_1 &= 6,84 \cdot 10^4 \text{ МПа}; \quad E_2 = 4750 \text{ МПа}; \quad G_{12} = G_{23} = 2600 \text{ МПа}; \\ \nu_{12} &= 0,38; \quad \nu_{23} = 0,1. \end{aligned} \quad (6.9.12)$$

Для сетчатого композита (см. рис. 6.22) с толщиной обшивки $h_0 = 0,75$ мм, высотой ребра $h_p = 6,0$ мм, шириной ребра $b_p = 4$ мм, углом наклона к меридиану $\varphi_p = \pm 30^\circ$, шагом ребра $s = 2\pi R/N_p$ ($R = 0,668$ м; N_p — число ребер под углом $\pm\varphi_p$ ($N_p = 120$); такое же количество ребер $N_p = 120$ расположено под углом $-\varphi_p$), углом намотки монослоев $\varphi_0 = 90^\circ$ полученные эффективные константы для исходного материала 1 (6.9.10) сведены в табл. 6.10. Разбивка $N = 2$ означает, что для 1/4 характерного объема (см. рис. 6.22) ребро разбито на два блока по длине и на один блок по высоте ребра (каждый блок содержит два конечных элемента). При $N = 2$ обшивка 1/4 харак-

Таблица 6.10

Эффективные упругие характеристики сетчатого композита (материал 1)

Эффективные жесткости	$N=2$	$N=3$	$N=4$
Q_{11} , Н/м	$0,207 \cdot 10^9$	$0,207 \cdot 10^9$	$0,207 \cdot 10^9$
Q_{22} , Н/м	$0,196 \cdot 10^9$	$0,196 \cdot 10^9$	$0,196 \cdot 10^9$
Q_{12} , Н/м	$0,688 \cdot 10^8$	$0,688 \cdot 10^8$	$0,688 \cdot 10^8$
Q_{66} , Н/м	$0,701 \cdot 10^8$	$0,701 \cdot 10^8$	$0,701 \cdot 10^8$
$\bar{D}_{11}$, Н·м	$0,817 \cdot 10^3$	$0,773 \cdot 10^3$	$0,751 \cdot 10^3$
$\bar{D}_{22}$, Н·м	$0,153 \cdot 10^3$	$0,133 \cdot 10^3$	$0,123 \cdot 10^3$
$\bar{D}_{12}$, Н·м	$0,106 \cdot 10^3$	$0,111 \cdot 10^3$	$0,114 \cdot 10^3$
$\bar{D}_{66}$, Н·м	$0,135 \cdot 10^3$	$0,130 \cdot 10^3$	$0,128 \cdot 10^3$
$\bar{B}_{11}$, Н	$0,687 \cdot 10^4$	$0,661 \cdot 10^4$	$0,672 \cdot 10^4$
$\bar{B}_{22}$, Н	$-0,422 \cdot 10^4$	$-0,405 \cdot 10^4$	$-0,401 \cdot 10^4$

терного объема разбита на 2×2 блока. Таким образом, для $1/4$ характерного объема при $N=2$ имеется 12 конечных элементов, при $N=3$ — 24 конечных элемента, при $N=4$ — 40 конечных элементов. При решении используется $1/4$ характерного объема с граничными условиями симметрии на осях симметрии. Граничные условия для всех девяти деформированных состояний задаются обычным способом (см. рис. 6.23). Деформированные состояния изгиба (3 и 4) задаются с помощью углов поворота нормали γ_x (или γ_y). При этом в каждой узловой точке обшивки задаются такие углы поворота, чтобы поверхность изгибалась точно по дуге окружности. В табл. 6.10 направление 1 (X) — направление меридиана оболочки, направление 2 (Y) — окружное направление. Отметим, что эффективные константы в табл. 6.10 определены для случая, когда обшивка и ребро изготовлены из материала 1 (6.9.10).

Мембранные жесткости $\bar{Q}_{ij}$ получаются точными уже при разбивке $N=2$, так как применяемый конечный элемент CAU2W36 точно воспроизводит состояние однородных мембранных деформаций. Для констант изгибных жесткостей $\bar{D}_{ij}$ при размельчении сетки наблюдается сходимость решений. При этом имеется практическая сходимость сверху точных значений, что соответствует оценке (6.9.9).

Рассмотрим расчет критических нагрузок цилиндрической оболочки из пространственно-сетчатого композита, эффективные характеристики которого были рассчитаны выше. Оболочка нагружена осевой сжимающей силой T (рис. 6.24). Рассматриваются два вида граничных условий. Для варианта А

$$u=v=w=0 \quad \text{при } z=0;$$

$$v=w=0 \quad \text{при } z=L. \quad (6.9.13)$$

Для варианта В верхний торец оболочки при $z=L$ свободный,

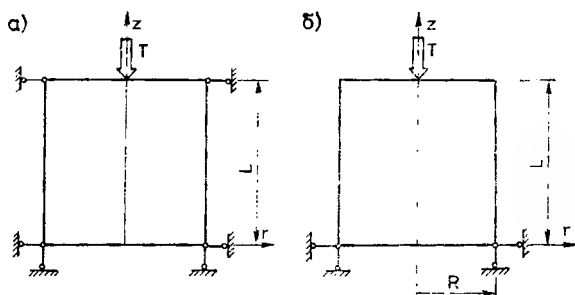


Рис. 6.24. Варианты граничных условий сжатой цилиндрической оболочки:
а — вариант А (6.9.13); б — вариант В (6.9.14)

а на нижнем торце заданы граничные условия шарнирного опирания

$$u=v=w=0 \quad \text{при} \quad z=0. \quad (6.9.14)$$

Геометрические характеристики рассматриваемой оболочки следующие: длина $L=1,39$ м; радиус $R=0,668$ м. Результаты расчета критических нагрузок для материала 1 (6.9.10) в зависимости от числа волн по окружности n представлены в табл. 6.11. Задача решается при двух вариантах граничных условий (А и В). Такой же расчет проведен для оболочки из материала 2 (6.9.11). Результаты расчета представлены в табл. 6.12.

Таблица 6.11

Расчетные критические нагрузки (кН)
цилиндрической оболочки из мате-
риала 1

Число волн по окру- жности n	Граничные условия	
	А (6.9.13)	В (6.9.14)
3	—	2098
4	—	1516
5	—	1095
6	3085	1048
7	2700	1024*
8	2656	1032
9	2589*	1084
10	2669	—
11	2743	—
12	3011	—

* Минимальные критические на-
грузки.

Таблица 6.12

Расчетные критические нагрузки (кН)
цилиндрической оболочки из мате-
риала 2

Число волн по окру- жности n	Граничные условия	
	А (6.9.13)	В (6.9.14)
2	—	1718
3	—	1592
4	3574	1085
5	2981	922
6	2341	909*
7	2256	912
8	2176*	965
9	2231	1049
10	2316	—

* Минимальные критические на-
грузки.

Таблица 6.13

Расчетные критические нагрузки (кН) цилиндрической оболочки (обшивка из материала 2, ребра из материала 3)

Число волн по окружности n	Граничные условия		Число волн по окружности n	Граничные условия	
	A (6.9.13)	B (6.9.14)		A (6.9.13)	B (6.9.14)
3	2879	1204	7	1388	598,2
4	2895	719,6	8	1347*	636,2
5	1811	603,4	9	1385	693,6
6	1443	594,7*	10	1446	766,0

* Минимальные критические нагрузки.

Третий вариант оболочки отличается от второго тем, что ребра изготовлены из материала 3 (6.9.12), а обшивка — из материала 2 (6.9.11). Результаты расчета представлены в табл. 6.13. Во всех трех случаях эффективные характеристики были рассчитаны при разбивке $N=3$. При расчете критических нагрузок оболочка была разбита на 20 конечных элементов CAU3W24 по длине оболочки ($N=20$).

Для контроля точности определения критических нагрузок вариант A—8 в табл. 6.12 ($T_*=2176$ кН) был рассчитан также при разбивке $N=30$. Была получена критическая сила $T_*=2166$ кН. Поэтому можно заключить, что разбивка $N=20$ гарантирует требуемую точность определения критических нагрузок.

Для варианта граничных условий B—6 ($n=6$) в табл. 6.13 при расчетной критической нагрузке $T_*=594,7$ кН проведено сравнение с экспериментальной критической нагрузкой T_3 . Полученное соотношение экспериментальной и теоретической критических нагрузок $T_3/T_*=0,62$. Кроме того, проведено сравнение теории и эксперимента по величине осевого перемещения торца оболочки в докритическом состоянии при силе $T=150$ кН. Расчетное осевое перемещение $u_*=0,74 \cdot 10^{-2}$ м. Соотношение экспериментального u_3 и теоретического перемещений $u_3/u_*=0,94$.

Таким образом, рассчитанные методом конечных элементов микронапряжения и микродеформации можно использовать для определения эффективной жесткости композитных материалов. Даже относительно грубая разбивка характерной ячейки приводит к требуемой точности определения констант эффективной жесткости. Эти жесткости могут быть использованы для определения интегральных характеристик оболочек: критических нагрузок, частот собственных колебаний, прогибов.

СМЕШАННЫЕ И ГИБРИДНЫЕ СХЕМЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

7.1. ВВЕДЕНИЕ

Как уже было указано в главе 2, ряд задач деформирования конструкций может быть эффективно решен с помощью схем метода конечных элементов, построенных на основе смешанных вариационных принципов. В кратком историческом обзоре [138] указаны основные этапы развития смешанных и гибридных схем метода конечных элементов применительно к решению задач для пластин, оболочек, а также к решению плоской и объемной задач. Основная трудность при построении смешанных и гибридных схем заключается в построении согласованных аппроксимаций для полей перемещений и напряжений. Здесь в отличие от метода перемещений не могут быть даны формальные приемы построения аппроксимаций. Искусство построения смешанных и гибридных конечных элементов заключается в выборе аппроксимаций, исключающих кинематические моды деформаций с нулевой энергией деформаций. Для достижения этой цели должны выполняться несколько условий. Для конечного элемента число параметров в аппроксимации напряжений n_σ и число параметров в аппроксимации перемещений n_d должны удовлетворять следующему неравенству [139, 167]:

$$n_\sigma \geq n_d - q_r, \quad (7.1.1)$$

где q_r — число степеней свободы конечного элемента при его перемещении как жесткого тела. Формально это неравенство легко выполнимо, однако данное условие не является единственным для исключения кинематических мод деформаций с нулевой энергией. При построении аппроксимаций требуется проводить тщательный анализ возможных причин появления кинематических мод деформаций в конечном элементе. Это открывает большие возможности и перспективы построения новых конечных элементов для смешанных и гибридных схем.

Рассмотрим общую схему построения конечноэлементных соотношений для обобщенного вариационного уравнения (Ва-

щину) и для вариационного уравнения Рейснера. Функционал (2.2.2) обобщенного вариационного принципа можно записать в матричном виде, учитывая, что на границах выполняются граничные условия в перемещениях:

$$\begin{aligned} \Pi_W = & \int \int_S [\varepsilon^T \mathbf{D} \varepsilon - \sigma^T (\varepsilon - \mathbf{L} \mathbf{u})] dS - \\ & - \int \int_S \mathbf{u}^T \mathbf{q}_* dS - \int_{c_T} \mathbf{u}^T \mathbf{C}_1 \sigma_* ds; \\ & \mathbf{u} = \mathbf{u}_* \text{ на } c_u. \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

Здесь ε , σ , $\mathbf{u}$ — матрицы деформаций, внутренних сил и перемещений соответственно; $\mathbf{q}_*$, σ_* , $\mathbf{u}_*$ — заданные поверхностные и граничные силы и перемещения. Для деформаций, внутренних сил и перемещений в конечном элементе используем соответственно следующие аппроксимации (индексы «e» в обозначениях опущены):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \mathbf{N}_e \varphi; \\ \sigma &= \mathbf{P} \beta; \\ \mathbf{u} &= \mathbf{N} \mathbf{d}. \end{aligned} \quad (7.1.3)$$

Здесь $\mathbf{N}_e$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{N}$ — аппроксимирующие функции для деформаций, внутренних сил и перемещений соответственно; φ , β , $\mathbf{d}$ — параметры деформаций, внутренних сил и перемещений соответственно. Подставляя аппроксимации (7.1.3) в функционал (7.1.2), получаем

$$\Pi_W = \varphi^T \mathbf{R} \varphi - \beta^T \mathbf{Z} \varphi + \beta^T \mathbf{Q} \mathbf{d} - \mathbf{d}^T \mathbf{F}. \quad (7.1.4)$$

Здесь элементы матриц $\mathbf{R}$, $\mathbf{Z}$, $\mathbf{Q}$ содержат обобщенные коэффициенты жесткости:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \int \int_S \mathbf{N}_e^T \mathbf{D} \mathbf{N}_e dS; \\ \mathbf{Z} &= \int \int_S \mathbf{P}^T \mathbf{N}_e dS; \\ \mathbf{Q} &= \int \int_S \mathbf{P}^T \mathbf{L} \mathbf{N} dS. \end{aligned} \quad (7.1.5)$$

Матрица сил $F = F_{q_*} + F_{\sigma}$, определяется в виде

$$\begin{aligned} F_{q_*} &= \int \int_S N^T q_* dS; \\ F_{\sigma_*} &= \int_{c_T} N^T C_1 \sigma_* ds. \end{aligned} \quad (7.1.6)$$

Вариация (7.1.4) по независимым функциональным аргументам φ , β и d приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_W}{\partial \varphi^T} &= R\varphi - Z^T \beta = 0; \\ \frac{\partial \Pi_W}{\partial \beta^T} &= Z\varphi + Qd = 0; \\ \frac{\partial \Pi_W}{\partial d^T} &= Q^T \beta - F = 0. \end{aligned} \quad (7.1.7)$$

Исключая из этих уравнений параметры деформаций φ и внутренних сил β , получаем уравнение равновесия конечного элемента в стандартной форме:

$$Kd = F. \quad (7.1.8)$$

Здесь K — матрица жесткости конечного элемента:

$$K = -Q^T X^{-1} Q, \quad (7.1.9)$$

где

$$X = ZR^{-1}Z^T,$$

или

$$K = -Q^T Z^{-1} R (Z^{-1})^T Q.$$

Аналогично получаем матрицу жесткости конечного элемента на основе смешанного функционала Рейснера. Функционал (2.3.2) можно представить в матричной записи, учитывая, что на границе c_u выполняются граничные условия в перемещениях:

$$\begin{aligned} \Pi_R &= \int \int_S \sigma^T L u dS - \frac{1}{2} \int \int_S \sigma^T S \sigma dS - \\ &\quad - \int \int_S u^T q_* dS - \int_{c_T} u^T C_1 \sigma_* ds; \\ u &= u_* \text{ на } c_u. \end{aligned} \quad (7.1.10)$$

Подставляя в этот функционал аппроксимации (7.1.3) для внутренних сил и перемещений, получаем

$$\Pi_R = \beta^T Q d - \frac{1}{2} \beta^T H \beta - d^T F. \quad (7.1.11)$$

Здесь H — матрица податливости:

$$H = \int_S P^T S P dS. \quad (7.1.12)$$

Варьируя (7.1.11) по независимым функциональным аргументам β и d , получаем следующую систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_R}{\partial \beta^T} &= Q d - H \beta = 0; \\ \frac{\partial \Pi_R}{\partial d^T} &= Q^T \beta - F = 0. \end{aligned} \quad (7.1.13)$$

Исключая из этих уравнений параметры напряжений β , приходим к стандартному уравнению равновесия конечного элемента

$$K d = F. \quad (7.1.14)$$

Здесь K — матрица жесткости конечного элемента, которая определяется через матрицу податливости:

$$K = Q^T H^{-1} Q. \quad (7.1.15)$$

Рассмотренные схемы могут применяться для построения различных смешанных и гибридных конечных элементов. На основе смешанных и гибридных схем метода конечных элементов решен ряд задач деформирования пластин и оболочек [24, 28, 117, 125, 155—160, 164 и др.]. Некоторые примеры построения гибридных конечных элементов однослойных и многослойных балок и пластин будут приведены далее.

7.2. ГИБРИДНЫЕ КОНЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ АНИЗОТРОПНЫХ БАЛОК

Сначала рассмотрим деформирование однослойных балок при плоском изгибе. Рассмотрим балку единичной ширины, высотой h и длиной L . Балка разбита на конечные элементы длиной $l = L/N$ (рис. 7.1). По линиям $x = \pm l/2$ производится стыковка с соседними конечными элементами. В любой точке балки при ее деформировании имеется плоское напряженное состояние $\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}$. Перемещения в направлении осей x и z

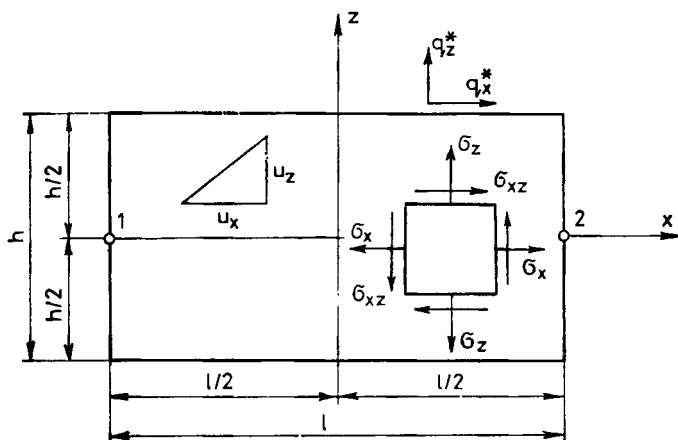


Рис. 7.1. Напряженное состояние в балке при поперечном изгибе

обозначаем через u_x и u_z . На граничных поверхностях $z = \pm h/2$ приложены внешние силы q_x^* и q_z^* . Принимаем, что балка изготовлена из линейно-упругого ортотропного материала с осями ортотропии, совпадающими с осями конструкции x, z . Деформирование материала подчиняется закону Гука

$$\varepsilon = S\sigma. \quad (7.2.1)$$

Здесь $\varepsilon^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_z, \gamma_{xz}\}$ — матрица деформаций; $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_z, \sigma_{xz}\}$ — матрица напряжений; S — матрица коэффициентов податливости ортотропного материала:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xz}}{E_x} & 0 \\ -\frac{\nu_{zx}}{E_z} & \frac{1}{E_z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \quad (7.2.2)$$

Принимаем, что на границах стыковки конечных элементов при $x = \pm l/2$ выполняются следующие граничные условия в перемещениях: $u_x = u_x^*$; $u_z = u_z^*$. Тогда модифицированный функционал Рейснера (1.2.18) для двумерного случая принимает следующий вид ($dS = dx dz$):

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \int_S \sigma^T S \sigma dS + \int_S \sigma^T \tilde{\varepsilon} dS - \int_{c_T} u^T q_* dx. \quad (7.2.3)$$

Здесь $u^T = \{u_x, u_z\}$ — матрица перемещений; $q_*^T = \{q_x^*, q_z^*\}$ — матрица заданных внешних сил на границе c_T . В функционале (7.2.3) введено обозначение $\tilde{\epsilon}$ для производных от перемещений:

$$\tilde{\epsilon}^T = \{\tilde{\epsilon}_x, \tilde{\epsilon}_z, \tilde{\gamma}_{xz}\},$$

где

$$\tilde{\epsilon}_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \tilde{\epsilon}_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}; \quad \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (7.2.4)$$

Варьируемыми величинами в функционале (7.2.3) являются напряжения и перемещения. Далее принимаем следующие допущения, которые позволяют свести двумерную задачу к одномерной:

1) перемещения в балке определяются согласно гипотезе Тимошенко:

$$\begin{aligned} u_x(x, z) &= z\gamma_x(x); \\ u_z(x, z) &= w(x), \end{aligned} \quad (7.2.5)$$

где w — перемещение оси ($z=0$) балки; γ_x — угол поворота нормали к оси x ;

2) не учитываются эффекты поперечного обжатия, т. е. кроме допущения $\epsilon_z=0$ принято также допущение, что $\sigma_z=0$;

3) двумерное поле напряжений удовлетворяет уравнениям равновесия внутри каждого конечного элемента:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} &= 0. \end{aligned} \quad (7.2.6)$$

Принимаем также, что касательная нагрузка отсутствует ($q_x^*=0$) и что поперечная нагрузка на балку приложена к оси балки ($z=0$) ($q_z^*=q$). В этом случае с учетом (7.2.4) и (7.2.5) функционал (7.2.3) принимает следующий вид:

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \iint_S \sigma^T S \sigma dS + \iint_S \sigma^T e dS - \int q w dx. \quad (7.2.7)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \sigma^T &= \{\sigma_x, \sigma_{xz}\}; \\ S &= \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{xz}} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e — матрица производных от перемещений:

$$e = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \\ \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = f(z) L(x) v. \quad (7.2.8)$$

Здесь $v^T = \{w, \gamma_x\}$ — матрица обобщенных перемещений оси балки; $f(z)$ — матрица аппроксимирующих функций по координате z ; $L(x)$ — матрица операторов дифференцирования по координате x :

$$f(z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad L(x) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial x} & 1 \end{bmatrix} \quad (7.2.9)$$

На основе функционала (7.2.7) построен гибридный конечный элемент с неразрывным полем перемещений между элементами и разрывным полем (локальным) напряжений. При этом перемещения варьируются для всей конструкции, а напряжения — только локально в каждом конечном элементе.

Матрица жесткости конечного элемента строится следующим образом. Для перемещений v выбираются аппроксимации, удовлетворяющие главным граничным условиям функционала (7.2.7) (ими являются функции w и γ_x):

$$\begin{aligned} w(x) &= N_1(x) w_1 + N^*_1(x) w'_1 + N_2(x) w_2 + N^*_2(x) w'_2; \\ \gamma_x(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \gamma_x^1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right) \gamma_x^2. \end{aligned} \quad (7.2.10)$$

Здесь N_1, N^*_1, N_2, N^*_2 — кубические функции формы, т. е. полиномы Эрмита (4.2.5), которые получены заменой $\xi = 2x/l$.

В матричной записи аппроксимация (7.2.10) имеет следующий вид:

$$v = N d_e. \quad (7.2.11)$$

Здесь $d_e^T = \{w_1, w'_1, \gamma_x^1, w_2, w'_2, \gamma_x^2\}$ — узловые неизвестные конечного элемента. Подставляя аппроксимацию (7.2.11) в соотношения (7.2.8), получаем

$$e = B d_e. \quad (7.2.12)$$

Аппроксимация для напряжений должна удовлетворять условию (7.1.1). При $n_d = 6, q_r = 2$ (для балки при плоском изгибе) число параметров напряжений $n_\beta \geq 4$. Как показывает прак-

тика вывода гибридных конечных элементов, для исключения кинематических мод деформаций количество параметров напряжений должно быть по возможности близким к минимально допустимому. Для напряжений σ_x в пределах элемента выбираем линейную аппроксимацию по координате z и кубическую аппроксимацию по координате x :

$$\sigma_x(x, z) = z(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 x^2 + \beta_4 x^3). \quad (7.2.13)$$

При отсутствии касательных нагрузок ($q_x^* = 0$) на поверхностях $z = \pm h/2$ касательные напряжения на этих поверхностях должны равняться нулю:

$$\sigma_{xz}(-h/2) = \sigma_{xz}(h/2) = 0. \quad (7.2.14)$$

С учетом этого из первого уравнения равновесия (7.2.6) получаем аппроксимацию для напряжения σ_{xz} :

$$\sigma_{xz} = \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] (\beta_2 + 2\beta_3 x + 3\beta_4 x^2). \quad (7.2.15)$$

Как видно, второе уравнение равновесия (7.2.6) при допущении $\sigma_z = 0$ и аппроксимации (7.2.15) не выполняется. Поэтому внутренние напряжения в данной модели не уравновешены в поперечном направлении, но уравновешены в продольном направлении. Это всегда имеет место в элементарных теориях изгибаемых балок, и при определенных соотношениях высоты балки и ее длины данное допущение не приводит к существенным погрешностям. Однако при деформировании коротких и податливых в трансверсальном направлении балок эффекты поперечного деформирования по нормали следует учитывать.

Аппроксимации (7.2.13) и (7.2.15) могут быть записаны в матричном виде:

$$\sigma = P(x, z)\beta. \quad (7.2.16)$$

Здесь $\beta^T = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$ — параметры напряжений; $P(x, z)$ — матрица аппроксимирующих функций для напряжений:

$$P(x, z) = \begin{bmatrix} z & 0 \\ 0 & \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & 1 & 2x & 3x^2 \end{bmatrix} \quad (7.2.17)$$

Подставляя аппроксимации (7.2.16) и (7.2.11) в функционал (7.2.7), с учетом (7.2.12) имеем

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \beta^T H \beta + \beta^T Q d_e - d_e^T F_e. \quad (7.2.18)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \iint_S \mathbf{P}^T \mathbf{S} \mathbf{P} dS; \\ \mathbf{Q} &= \iint_S \mathbf{P}^T \mathbf{B} dS; \\ \mathbf{F}_e &= \int_{-l/2}^{l/2} q \mathbf{N}^T \mathbf{R} dx, \end{aligned} \quad (7.2.19)$$

где $\mathbf{R}^T = [1 \ 0]$ — булева матрица.

Матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{Q}$ по координате z можно проинтегрировать аналитически. После этого в матрице податливости $\mathbf{S}$, которую содержит функционал (7.2.7), при модуле поперечного сдвига G_{xz} появляется множитель $5/6$.

Условие стационарности функционала (7.2.18) приводит к следующей системе уравнений:

$$\frac{\partial \Pi_{RM}}{\partial \beta^T} = -\mathbf{H}\beta + \mathbf{Q}d_e = 0; \quad (7.2.20)$$

$$\frac{\partial \Pi_{RM}}{\partial d_e^T} = \mathbf{Q}^T \beta - \mathbf{F}_e = 0. \quad (7.2.21)$$

Из уравнений (7.2.20) определяются параметры напряжений β :

$$\beta = \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q} d_e. \quad (7.2.22)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения (7.2.21), получаем стандартные уравнения равновесия конечного элемента, связывающие узловые перемещения d_e и узловые силы $\mathbf{F}_e$:

$$\mathbf{K}_e d_e = \mathbf{F}_e. \quad (7.2.23)$$

Здесь $\mathbf{K}_e$ — матрица жесткости конечного элемента:

$$\mathbf{K}_e = \mathbf{Q}^T \mathbf{H}^{-1} \mathbf{Q}. \quad (7.2.24)$$

Система уравнений равновесия для всей конструкции, аналогичная системе (7.2.23), получается стандартным образом:

$$\mathbf{K} d = \mathbf{F}. \quad (7.2.25)$$

Здесь $\mathbf{K}$ — матрица жесткости всей конструкции, которая получается суммированием матриц жесткости одного конечного элемента $\mathbf{K}_e$; d , $\mathbf{F}$ — совокупность узловых перемещений и сил для всей конструкции. Решением системы уравнений (7.2.25) (матрица $\mathbf{K}$ положительно определена и симметрична, потому

что такова матрица **H**) определяются узловые перемещения **d**. Далее по формулам (7.2.22) для каждого конечного элемента вычисляются параметры напряжений β , а по формулам (7.2.13) и (7.2.15) — напряжения.

Интегральные усилия — изгибающий момент M_{xx} и поперечная сила Q_x определяются усреднением напряжений:

$$M_{xx}^\sigma = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz; \quad Q_x^\sigma = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{xz} dz. \quad (7.2.26)$$

В соотношениях (7.2.26) напряжения σ_x , σ_{xz} , момент M_{xx}^σ и поперечная сила Q_x^σ определяются через параметры напряжений β . Но, так как с применением смешанного функционала (7.2.7) независимо от напряжений определяется и поле перемещений (параметры **d**), вычисляя из перемещений по соотношениям (7.2.12) деформации, а из этих деформаций по закону Гука — напряжения, получаем другие значения усилий (7.2.26), которые для однослойной балки определяются по зависимостям

$$M_{xx}^w = \frac{h^3}{12} E_x \frac{\partial \gamma_x}{\partial x};$$

$$Q_x^w = kh G_{xz} \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right). \quad (7.2.27)$$

Так как уравнения состояния являются уравнениями Эйлера для функционала (7.2.7), при приближенном решении задачи методом конечных элементов эти уравнения выполняются приближенно ($M_{xx}^\sigma \approx M_{xx}^w$; $Q_x^\sigma \approx Q_x^w$). В пределе при размельчении сетки конечных элементов невязка уравнения состояния стремится к нулю.

Рассмотренный конечный элемент предназначен для решения практических задач деформирования балок из композитных материалов, так как учитывает их слабую трансверсальную жесткость. Данный конечный элемент обозначаем через *SIW6σ4* (6 степеней свободы по перемещениям и 4 параметра напряжений).

Проверку работоспособности данного конечного элемента проводим на тестовом примере. На рис. 7.2 показаны эпюры изгибающих моментов M_{xx}^σ , M_{xx}^w и поперечных сил Q_x^σ , Q_x^w однослойной шарнирно опертой балки под действием равномерно распределенной нагрузки q при $h/L=1/10$ и $E_x/G_{xz}=10$. При расчете использован конечный элемент *SIW6σ4* с разбивкой на N элементов по длине балки. Значение прогиба балки по решению МКЭ точно совпадает со значением прогиба по аналитическому решению для балки Тимошенко уже при раз-

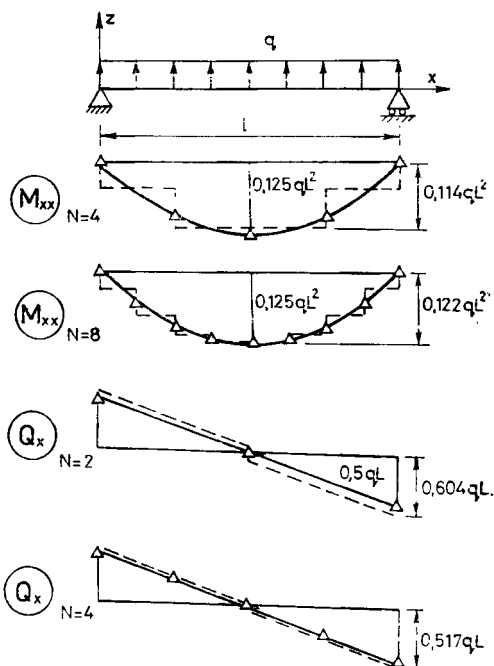


Рис. 7.2. Эпюры моментов M_{xx} и поперечных сил Q_x в изгибаемой балке:

— — — — — аналитическое решение;
 Δ — решение МКЭ (эпюры M_{xx}^σ и Q_x^σ);
 — — — — — решение МКЭ (эпюры M_{xx}^w и Q_x^w , определенные через перемещения)

бивке $N=2$. Момент M_{xx}^σ и поперечная сила Q_x^σ , вычисленные из параметров напряжений β , также точно совпадают с аналитическим решением уже при разбивке $N=2$. Для иллюстрации уменьшения невязки уравнения состояния при уменьшении размеров конечных элементов на рис. 7.2 показаны также эпюры моментов M_{xx}^w и поперечных сил Q_x^w , которые вычислены из перемещений. Таким образом, учитывая хорошую сходимость как по перемещениям, так и по усилиям, конечный элемент $SIW6\sigma 4$ можно рекомендовать для статических расчетов однослойных, слабо сопротивляющихся поперечному сдвигу балок, когда требуется увеличить точность определения напряжений.

Рассмотрим далее упрощенный вариант функционала Рейснера (7.2.7). Для однослойной балки при линейной аппроксимации напряжений σ_x по координате z соотношения типа (7.2.13) и (7.2.15) можно записать в виде

$$\sigma_x = z\sigma_x^*(x);$$

$$\sigma_{xz} = \frac{h^2}{8} \left[1 - \left(\frac{2z}{h} \right)^2 \right] \sigma_{xz}^*(x). \quad (7.2.28)$$

Подставляя эти соотношения в функционал (7.2.7), после интегрирования с учетом (7.2.26) получаем

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{M_{xx}^2}{E_x I_y} + \frac{Q_x^2}{5/6 G_{xz} F} \right\} dx + \\ + \int \left\{ M_{xx} \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} + Q_x \left(\gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \right\} dx - \int q w dx, \quad (7.2.29)$$

где $I_y = h^3/12$; $F = 1 \cdot h$. Видно, что при параболическом распределении касательных напряжений σ_{xz} по толщине балки коэффициент сдвига $k = 5/6$. Далее, интегрируя по частям два раза третий член функционала (7.2.29) при условии, что в пределах конечного элемента выполняется уравнение равновесия $Q_x = -M_{xx,x}$, получаем

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \int \left\{ \frac{M_{xx}^2}{E_x I_y} + \frac{M_{xx,x}^2}{5/6 G_{xz} F} \right\} dx - \\ - \int M_{xx} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx - \int q w dx. \quad (7.2.30)$$

Этот функционал совпадает с функционалом (2.5.8).

Для вывода матрицы жесткости конечного элемента на основе функционала (7.2.30) принимаем прогиб w и его производную w' за узловые неизвестные. Тогда вектор узловых перемещений имеет вид ($n_d = 4$)

$$d_e^T = \{w_1, w'_1, w_2, w'_2\},$$

т. е. аппроксимация функции прогиба $w(x)$ проводится кубическим полиномом (7.2.10). Из условия (7.1.1) устанавливаем количество параметров напряжений $n_\beta \geq 2$. Принимаем $n_\beta = 2$, и тогда аппроксимация для момента является линейной функцией от координаты x :

$$M_{xx} = \beta_1 + \beta_2 x. \quad (7.2.31)$$

Подставляя аппроксимации (7.2.10) и (7.2.31) в функционал (7.2.30), после аналитического интегрирования по формулам (7.2.19) получаем матрицы **H** и **Q**, а по формуле (7.2.24) — матрицу жесткости конечного элемента **K_e**. Выведенная таким образом из смешанного функционала (7.2.30) матрица жесткости конечного элемента *SIW4σ2* (4 степени свободы по перемещениям и 2 параметра напряжений) совпадает с матрицей жесткости, которая получена с использованием функционала Лагранжа [9]. Однако в отличие от последней в данном случае напряжения определяются не через перемещения, деформации и закон Гука, а непосредственно из соотношений (7.2.22) и (7.2.31). Данный конечный элемент применялся для решения

задач оптимизации пространственной структуры армированных стержней, работающих на устойчивость и в режиме колебаний [59]. Однако для конечного элемента $SIW4\sigma 2$ не удастся корректно сформулировать граничные условия в защемлении. В данном случае вместо условий $w=0$ и $\gamma_x=0$ используются условия $w=0$ и $w'=0$, что не эквивалентно.

7.3. ГИБРИДНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ МНОГОСЛОЙНОЙ БАЛКИ

Построение конечного элемента многослойной балки (рис. 7.3) проводится так же, как для однослойной. Функционал (7.2.7) для многослойной балки из K слоев имеет вид

$$\Pi_{RM} = \sum_{k=1}^K \left\{ -\frac{1}{2} \iint_{S_e^k} \sigma_k^T S_k \sigma_k dS + \iint_{S_e^k} \sigma_k^T \epsilon dS \right\} - \int_{c_T} q w dx. \quad (7.3.1)$$

Здесь $\sigma_k^T = \{\sigma_x^k, \sigma_{xz}^k\}$ — напряжения в k -м слое; S_e^k — площадь k -го слоя конечного элемента; S_k — матрица коэффициентов податливости k -го слоя:

$$S_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x^k} & 0 \\ 0 & \frac{1}{G_{xz}^k} \end{bmatrix}$$

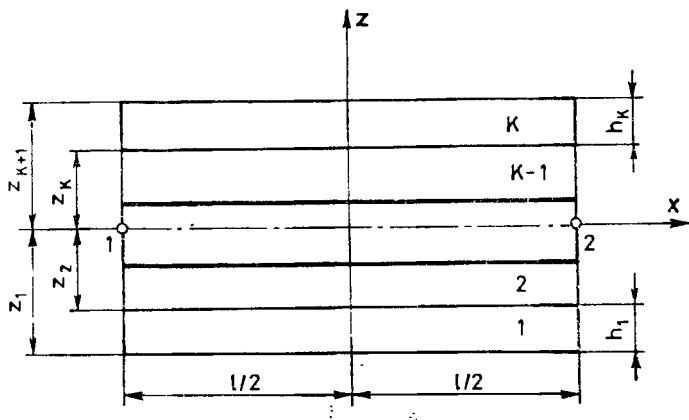


Рис. 7.3. Конечный элемент слоистой балки

Здесь E_x^k , G_{xz}^k — соответственно продольный модуль упругости и модуль поперечного сдвига k -го слоя.

Принимаем, что гипотеза Тимошенко (7.2.5) выполняется для всего пакета слоев в целом и, следовательно, деформации $\mathbf{e}$ (производные от перемещений) в функционале (7.3.1) едины для всех слоев и образуют единое поле перемещений для всей балки. Аппроксимация для перемещений имеет вид, аналогичный (7.2.11):

$$\mathbf{v} = \mathbf{N} \mathbf{d}_e. \quad (7.3.2)$$

$2 \times 1 \quad 2 \times n_d \quad n_d \times 1$

После использования этой аппроксимации в матрице для производных от перемещений (7.2.8) имеем

$$\mathbf{e} = \mathbf{B} \mathbf{d}_e. \quad (7.3.3)$$

$2 \times 1 \quad 2 \times n_d \quad n_d \times 1$

В то же время поле напряжений является локальным и в конечном элементе, и в слое. Аппроксимации для напряжений также локальны. Для напряжений σ_k в каждом слое выбирается аппроксимация, удовлетворяющая одному уравнению равновесия (в продольном направлении)

$$\frac{\partial \sigma_x^k}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}^k}{\partial z} = 0, \quad (7.3.4)$$

статическим граничным условиям в месте стыковки k -го и $k+1$ -го слоев

$$\sigma_{xz}^k(z_{k+1}) = \sigma_{xz}^{k+1}(z_{k+1}) \quad (7.3.5)$$

и граничным условиям на крайних волокнах балки

$$\sigma_{xz}^1 \left(z_1 = -\frac{h}{2} \right) = 0; \quad \sigma_{xz}^K \left(z_{k+1} = \frac{h}{2} \right) = 0. \quad (7.3.6)$$

Двумерную аппроксимацию напряжений для каждого слоя можно записать в матричном виде:

$$\sigma_k(x, z) = \mathbf{P}_k(x, z) \beta_k, \quad (7.3.7)$$

$2 \times 1 \quad 2 \times n_\beta^k \quad n_\beta^k \times 1$

где $\mathbf{P}_k(x, z)$ — матрица, содержащая аппроксимирующие функции; β_k — параметры напряжений для k -го слоя, которые в отличие от параметров перемещений $\mathbf{d}_e$ не имеют смысла узловых неизвестных; n_β^k — количество параметров β_k в k -м слое. Отметим, что общее количество параметров напряжений n_β для

конечного элемента, состоящего из K слоев, определяется суммой параметров напряжений n_{β}^k для слоя k :

$$n_{\beta} = \sum_{k=1}^K n_{\beta}^k.$$

Подставляя аппроксимации (7.3.2) и (7.3.7) в функционал (7.3.1), с учетом (7.3.3) получаем

$$\Pi_{RM} = \sum_{k=1}^K \left\{ -\frac{1}{2} \beta_k^T \mathbf{H}_k \beta_k + \beta_k^T \mathbf{Q}_k \mathbf{d}_e \right\} - \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e, \quad (7.3.8)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_k &= \iint_{S_e^k} \mathbf{P}_k^T \mathbf{S}_k \mathbf{P}_k dS; \\ n_{\beta}^k \times n_{\beta}^k & \quad S_e^k \quad n_{\beta}^k \times 2 \quad 2 \times 2 \quad 2 \times n_{\beta}^k \\ \mathbf{Q}_k &= \iint_{S_e^k} \mathbf{P}_k^T \mathbf{B} dS; \\ n_{\beta}^k \times n_d & \quad S_e^k \quad n_{\beta}^k \times 2 \quad 2 \times n_d \\ \mathbf{F}_e &= \int_{c_T} q \mathbf{N}^T \mathbf{R} dx, \end{aligned} \quad (7.3.9)$$

где $\mathbf{R}^T = [1 \ 0]$ — булева матрица.

Совокупность всех параметров β_k для многослойного конечного элемента обозначаем через β . При этом параметры β_k и β связаны зависимостями

$$\beta_k = \mathbf{C}_k \beta. \quad (7.3.10)$$

Здесь $\mathbf{C}_k$ — булевы матрицы. Соотношения (7.3.10) подставляются в (7.3.8), и тогда этот функционал выражается через совокупность параметров напряжений β :

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \beta^T \mathbf{H} \beta + \beta^T \mathbf{Q} \mathbf{d}_e - \mathbf{d}_e^T \mathbf{F}_e. \quad (7.3.11)$$

Здесь матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{Q}$ определяются из матриц $\mathbf{H}_k$ и $\mathbf{Q}_k$ (7.3.9) суммированием их по всем слоям конечного элемента:

$$\mathbf{H} = \sum_{k=1}^K \mathbf{C}_k^T \mathbf{H}_k \mathbf{C}_k; \quad \mathbf{Q} = \sum_{k=1}^K \mathbf{C}_k^T \mathbf{Q}_k. \quad (7.3.12)$$

Условие стационарности функционала (7.3.11) приводит к системе уравнений (7.2.20) и (7.2.21). Матрица жесткости конечного элемента определяется соотношением (7.2.24).

Алгоритм решения задачи аналогичен изложенному в предыдущем параграфе. Решением системы уравнений (7.2.25) определяются перемещения. Из них по формулам (7.2.22) для каждого конечного элемента вычисляются параметры напряжений β , по формулам (7.3.10) — параметры напряжений в k -м слое β_k и по формулам (7.3.7) — напряжения в k -м слое.

По изложенной методике для многослойной балки построен конечный элемент $SIW4\sigma(5K-3)$ (4 степени свободы по перемещениям, $5K-3$ параметров напряжений). Для этого конечного элемента число параметров напряжений n_β зависит от общего количества слоев K при условии, что $K > 1$. Например, для трехслойной балки $n_\beta = 12$. Функционал (7.3.1) для конечного элемента с многослойной структурой (см. рис. 7.3) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \Pi_{RM} = \sum_{k=1}^K \left\{ -\frac{1}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_k^T S_k \sigma_k dz dx + \right. \\ \left. + \int_{-l/2}^{l/2} \int_{z_k}^{z_{k+1}} \sigma_k^T \epsilon dz dx \right\} - \int_{-l/2}^{l/2} q w dx. \end{aligned} \quad (7.3.13)$$

Принимаем в пределах конечного элемента линейную аппроксимацию для прогиба w и угла поворота γ_x :

$$\begin{aligned} w(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) w_1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right) w_2; \\ \gamma_x(x) &= \frac{1}{2} \left(1 - \frac{2x}{l} \right) \gamma_x^1 + \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2x}{l} \right) \gamma_x^2. \end{aligned} \quad (7.3.14)$$

Тогда вектор узловых неизвестных имеет вид ($n_d = 4$)

$$d_e^T = \{w_1, \gamma_x^1, w_2, \gamma_x^2\}. \quad (7.3.15)$$

Чтобы удовлетворить условию неразрывности касательных напряжений σ_{xz} между k -м и $k+1$ -м слоями (7.3.5), выбираем их квадратичную зависимость от координаты x на этой границе:

$$\sigma_{xz}(z = z_{k+1}) = \bar{\beta}_1^{k+1} + \bar{\beta}_2^{k+1} x + \bar{\beta}_3^{k+1} x^2. \quad (7.3.16)$$

Здесь параметры $\bar{\beta}_i^{k+1}$ относятся к границе раздела k -го и $k+1$ -го слоев. При линейной зависимости напряжений σ_x^k по

координате z в пределах слоя с учетом уравнения равновесия (7.3.4) аппроксимации для напряжений имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}\sigma_x^k &= -\frac{1}{H_k}(\bar{\beta}_1 - \bar{\beta}_1^{k+1})x + \frac{A_k(z)}{3H_k^2}(3\bar{\beta}_2^k x^2 + 2\bar{\beta}_3^k x^3) + \\ &+ \frac{B_k(z)}{3H_k^2}(3\bar{\beta}_2^{k+1} x^2 + 2\bar{\beta}_3^{k+1} x^3) + \beta_1^k + \beta_2^k z; \\ \sigma_{xz}^k &= \frac{(z - z_{k+1})}{H_k} \bar{\beta}_1^k + \frac{(z_k - z)}{H_k} \bar{\beta}_1^{k+1} + \\ &+ \frac{C_k(z)}{H_k^2}(\bar{\beta}_2^k x + \bar{\beta}_3^k x^2) + \frac{D_k(z)}{H_k^2}(\bar{\beta}_2^{k+1} x + \bar{\beta}_3^{k+1} x^2).\end{aligned}\quad (7.3.17)$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}H_k &= z_k - z_{k+1}; \\ A_k(z) &= z_k + 2z_{k+1} - 3z; \\ B_k(z) &= 2z_k + z_{k+1} - 3z; \\ C_k(z) &= 2z_k z_{k+1} + z_{k+1}^2 - 2z(z_k + 2z_{k+1}) + 3z^2; \\ D_k(z) &= z_k^2 + 2z_k z_{k+1} - 2z(2z_k + z_{k+1}) + 3z^2.\end{aligned}\quad (7.3.18)$$

В соотношениях (7.3.17) параметры β_i^k относятся только к k -му слою, параметры $\bar{\beta}_i^k$ — к границе раздела k -го и $k-1$ -го слоев, параметры $\bar{\beta}_i^{k+1}$ — к границе раздела k -го и $k+1$ -го слоев.

Условие (7.3.6) приводит к нулевым значениям следующих параметров в первом и K -м слоях:

$$\begin{aligned}\bar{\beta}_1^1 &= \bar{\beta}_2^1 = \bar{\beta}_3^1 = 0; \\ \bar{\beta}_1^{K+1} &= \bar{\beta}_2^{K+1} = \bar{\beta}_3^{K+1} = 0.\end{aligned}\quad (7.3.19)$$

Учитывая (7.3.19), совокупность параметров напряжений для всех K слоев обозначаем через β :

$$\begin{aligned}\beta^T &= \{\beta_1^1, \beta_2^1, \bar{\beta}_1^2, \bar{\beta}_2^2, \bar{\beta}_3^2, \dots, \\ &1 \times n_\beta \\ \bar{\beta}_1^K, \bar{\beta}_2^K, \bar{\beta}_3^K, \beta_1^K, \beta_2^K\}.\end{aligned}\quad (7.3.20)$$

Здесь $n_\beta = 5K - 3$ при условии, что $K > 1$. Из (7.3.20) для каждого слоя определяются соотношения типа (7.3.10). Подставляя аппроксимации (7.3.14) и (7.3.17) в функционал (7.3.13), по формулам (7.3.9) для каждого слоя получаем матрицы $\mathbf{H}_k$ и $\mathbf{Q}_k$, по формулам (7.3.12) — матрицы $\mathbf{H}$ и $\mathbf{Q}$ для всего многослойного конечного элемента, а по формуле (7.2.24) — мат-

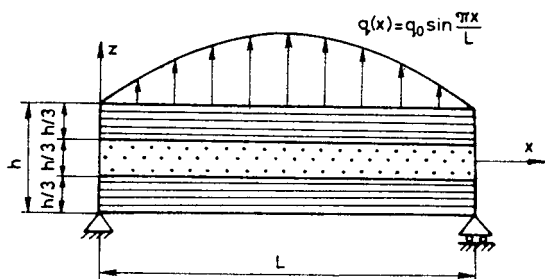


Рис. 7.4. Изгиб трехслойной балки из углепластика

рицу жесткости K_e конечного элемента. При вычислении матриц H_k и Q_k по формулам (7.3.9) используется численное интегрирование по схеме Гаусса с 16 точками интегрирования в слое [73]. Данная схема точно интегрирует полином 7-го порядка. Так как подинтегральные функции содержат члены полинома не выше 6-го порядка, то элементы матрицы жесткости вычисляются без погрешностей численного интегрирования. Решением системы уравнений (7.2.25) определяются перемещения d . Затем по формулам (7.2.22) в каждом конечном элементе вычисляются параметры напряжений β , из которых по формулам (7.3.10), (7.3.17) и (7.3.18) определяются напряжения в каждом слое. Далее по формулам (7.2.26) можно вычислить моменты и поперечные силы в балке.

Рассмотрим пример решения задачи изгиба трехслойной углепластиковой балки (рис. 7.4), для которой имеется аналитическое решение по теории упругости [136].

Балка состоит из углепластиковых однонаправленно армированных монослоев со следующими характеристиками (ось 1 совпадает с направлением армирования): $E_{11}=1,724 \cdot 10^5$ МПа; $E_{22}=6895$ МПа; $G_{12}=3448$ МПа; $G_{23}=1379$ МПа; $\nu_{12}=0,25$. Направление армирования 1-го и 3-го слоев совпадает с осью балки x , а направление армирования 2-го слоя перпендикулярно оси балки: $E_x^k=E_{11}$, $G_{xz}^k=G_{12}$ ($k=1, 3$); $E_x^2=E_{22}$; $G_{xz}^2=G_{23}$. Геометрия и нагрузка на балку следующие: $L=24$; $b=1$; $h/L=1/4$ и $1/10$; $q_0=0,6895$ МПа.

Решение этой задачи (см. рис. 7.4) для трехслойной балки ($K=3$) получено с использованием конечного элемента $SIW4\sigma 12$. При сравнении с решением по теории упругости использованы следующие безразмерные величины:

$$\bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{q_0}; \quad \bar{\sigma}_{xz} = \frac{\sigma_{xz}}{q_0}; \quad \bar{w} = \frac{100 \cdot E_{22} h^3}{q_0 L^4} w. \quad (7.3.21)$$

Таблица 7.1

Результаты решения задачи изгиба трехслойной балки из углепластика

L/h	Число слоев K	Прогиб в центре w	Аналитическое решение			Решение МКЭ		
			Теория упругости [136]	Классическая теория	Теория Тимошенко	<i>ELEMZ</i> [159]	<i>MLP3K</i> [159]	<i>SIW4σ12</i> ($N=8$)
4	3	$\bar{w}$	2,8872	0,50966	2,0943	2,9102	3,1617	3,5000
		ε	—	82,35	27,46	-0,80	-9,51	-21,22
10	3	$\bar{w}$	0,93164	0,50966	0,7631	0,93167	0,94054	0,9886
		ε	—	45,29	18,09	-0,003	-0,96	-6,11

Проведено сравнение этих величин в следующих сечениях и точках балки:

$$\bar{\sigma}_x(L/2, z); \quad \bar{\sigma}_{xz}(0, z); \quad \bar{w}(L/2, 0).$$

В табл. 7.1 приведены значения безразмерного прогиба в центре балки, полученные по различным теориям. Решение методом конечных элементов на основе конечного элемента *SIW4σ12* получено при разбивке $N=8$ на полудлине балки. Дальнейшее размельчение сетки конечных элементов практически не изменяет результат. В табл. 7.1 для сравнения приведены результаты решения по теории упругости [136], аналитические решения по теории слоистых балок на основе гипотезы прямых нормалей (классическая теория) и на основе гипотезы Тимошенко, а также решения методом конечных элементов на основе сме-

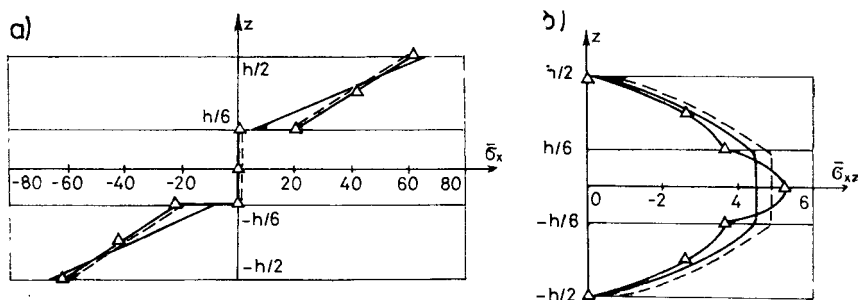


Рис. 7.5. Распределение нормальных $\bar{\sigma}_x(L/2, z)$ (а) и касательных $\bar{\sigma}_{xz}(0, z)$ напряжений по высоте балки при $L/h=10$:

— решение по теории упругости [136]; Δ — Δ — решение МКЭ (*SIW4σ12*);
 - · - · - аналитическое решение по классической теории слоистых балок

шанного функционала с независимой аппроксимацией напряжений и перемещений в каждом слое [159]. Из анализа результатов табл. 7.1 видно, что, например, при $L/h=10$ применение конечного элемента $SIW4\sigma12$ приводит к значительно меньшей ошибке (6,11%) при определении прогиба по сравнению с решением по теории упругости, а также с решением по теории типа Тимошенко, учитывающей усредненные поперечные сдвиги (18,19%). Ошибка ε вычисляется следующим образом:

$$\varepsilon = \left| \frac{\bar{w}_T - \bar{w}_*}{\bar{w}_T} \right| \cdot 100\%,$$

где $\bar{w}_T$ — точное значение безразмерного прогиба в центре балки по теории упругости; $\bar{w}_*$ — приближенное значение прогиба.

На рис. 7.5 представлено распределение нормальных $\bar{\sigma}_x$ и касательных $\bar{\sigma}_{xz}$ напряжений по высоте балки с соотношением пролета к высоте $L/h=10$. Сравниваются результаты решения по теории упругости, по классической теории балок (теория Тимошенко при определении напряжений дает почти такие же результаты) и с применением конечного элемента $SIW4\sigma12$. На рис. 7.6 такое же сравнение проводится для балки с соотношением пролета к высоте $L/h=4$. Из анализа результатов, представленных на рис. 7.5 и 7.6, видно, что при соотношении про-

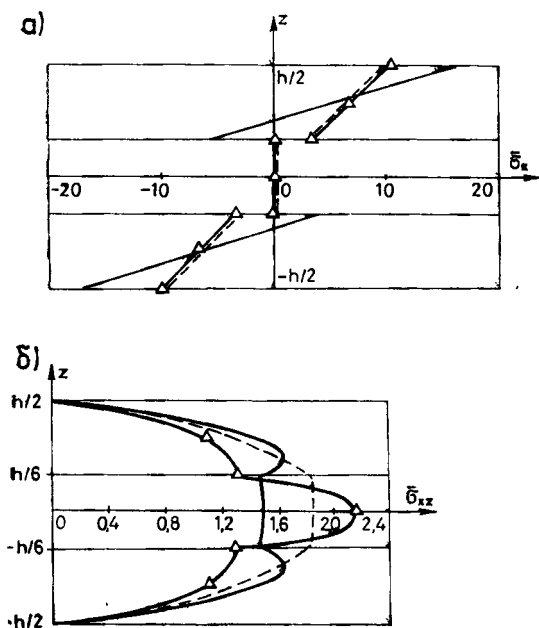


Рис. 7.6. Распределение нормальных $\sigma_x(L/2, z)$ (а) и касательных $\sigma_{xz}(0, z)$ (б) напряжений по высоте балки при $L/h=4$.

Обозначения те же, что на рис. 7.5

лета балки к высоте $L/h=10$ точность определения напряжений с применением конечного элемента $SIW4\sigma/2$ достаточна для практики. При $L/h=4$ ошибка в определении максимальных значений превышает 50%. Таким образом, конечный элемент $SIW4\sigma(5K-3)$ можно рекомендовать для расчета прогибов анизотропных слоистых балок при $h/L \leq 1/4$ и для расчета напряжений при $h/L \leq 1/10$.

7.4. ГИБРИДНЫЙ ТРЕУГОЛЬНЫЙ КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ИЗГИБАЕМОЙ ОРТОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ

Для построения конечных элементов изгибаемых пластин также может применяться формулировка, описанная в параграфе 7.1. Ряд гибридных конечных элементов тонких, толсто-стенных и слоистых изгибаемых пластин рассмотрен в работах [156—160], где показаны преимущества этих элементов при определении напряжений по сравнению с элементами метода перемещений. В указанных работах рассматривались прямоугольные конечные элементы с различным порядком аппроксимирующих полиномов по перемещениям и напряжениям. Здесь рассмотрим построение матрицы жесткости гибридного треугольного конечного элемента изгибаемой пластины, так как треугольная форма элемента является самой универсальной для анализа пластин любых конфигураций.

Напряженное состояние в изгибаемой пластине является трехмерным, поэтому при построении гибридного конечного элемента исходим из модифицированного функционала Рейснера (1.2.18) для трехмерного тела:

$$\Pi_{RM}(u_i, \sigma_{ij}) = - \int_V \Phi_0(\sigma_{ij}) dV + \\ + \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}) dV - \int_{S_T} T_i^* n_i dS, \quad i, j = x, y, z. \quad (7.4.1)$$

При построении конечного элемента используются следующие предположения:

1) пренебрегают эффектами обжатия нормали, т. е. $\sigma_z=0$ и $\epsilon_z=0$;

2) перемещения по толщине пластины распределяются согласно гипотезе Тимошенко:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= z\gamma_x(x, y); \\ u_y(x, y, z) &= z\gamma_y(x, y); \\ u_z(x, y, z) &= w(x, y); \end{aligned} \quad (7.4.2)$$

3) пластина изготовлена из линейно-упругого ортотропного материала, следующего закону Гука

$$\varepsilon = S\sigma. \quad (7.4.3)$$

Здесь $\varepsilon^T = \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}, \gamma_{xy}\}$ — матрица деформаций в любой точке пластины; $\sigma^T = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}\}$ — матрица напряжений в пластине; S — матрица коэффициентов податливости ортотропного материала:

$$S = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix} \quad (7.4.4)$$

где E_x, E_y — модули упругости в направлении осей x и y ; G_{xz}, G_{yz}, G_{xy} — модули сдвига в соответствующих плоскостях; ν_{xy}, ν_{yx} — коэффициенты Пуассона.

Удельная дополнительная энергия для пластины из ортотропного материала с учетом (7.4.3) может быть определена в виде

$$\Phi_0 = \frac{1}{2} \sigma^T \varepsilon = \frac{1}{2} \sigma^T S \sigma. \quad (7.4.5)$$

Вводим матричные обозначения для перемещений u и заданных сил T_* на границе S_T :

$$u^T = \{u_x, u_y, u_z\}; \\ T_*^T = \{T_x^*, T_y^*, T_z^*\}. \quad (7.4.6)$$

Вводим также матричные обозначения для производных от перемещений:

$$\tilde{\varepsilon}^T = \{\tilde{\varepsilon}_x, \tilde{\varepsilon}_y, \tilde{\gamma}_{yz}, \tilde{\gamma}_{xz}, \tilde{\gamma}_{xy}\},$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{\varepsilon}_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \tilde{\varepsilon}_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \tilde{\gamma}_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \tilde{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \quad \tilde{\gamma}_{xz} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.4.7)$$

Отметим, что для функционала (7.4.1) деформация ε определяется из напряжений σ по закону Гука (7.4.3), а не из соотношений (7.4.7). Подстановка соотношений (7.4.2) в (7.4.7) позволяет определить матрицу $\tilde{\varepsilon}$ через производные от трех обобщенных перемещений w , γ_x , γ_y :

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} z \frac{\partial \gamma_x}{\partial x} \\ z \frac{\partial \gamma_y}{\partial y} \\ \gamma_y + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \gamma_x + \frac{\partial w}{\partial x} \\ z \left(\frac{\partial \gamma_x}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} = \mathbf{f}(z) \mathbf{L}(x, y) \mathbf{v}. \quad (7.4.8)$$

Здесь $\mathbf{v}^T = \{\gamma_x, \gamma_y, w\}$ — матрица обобщенных перемещений пластины; $\mathbf{f}(z)$ — матрица аппроксимирующих функций по координате z ; $\mathbf{L}(x, y)$ — матрица операторов дифференцирования по координатам x, y :

$$\mathbf{f}(z) = \begin{bmatrix} z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{L}(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 1 & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{bmatrix}$$

С учетом (7.4.5), (7.4.6) и (7.4.8) функционал (7.4.1) в матричной записи имеет следующий вид:

$$\Pi_{RM} = -\frac{1}{2} \int_V \sigma^T S \sigma dV + \int_V \sigma^T \bar{\varepsilon} dV - \int_{S_T} u^T T_* dS. \quad (7.4.9)$$

Принимаем, что касательная нагрузка на поверхностях $z = \pm h/2$ отсутствует: $T_x^* = T_y^* = 0$. Нормальная нагрузка на пластину считается приложенной на срединной поверхности пластины: $T_z^* = q$ при $z = 0$.

В этом случае касательные напряжения на поверхностях $z = \pm h/2$ должны обращаться в нуль:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} \left(z = +\frac{h}{2} \right) &= \sigma_{xz} \left(z = -\frac{h}{2} \right) = 0; \\ \sigma_{yz} \left(z = +\frac{h}{2} \right) &= \sigma_{yz} \left(z = -\frac{h}{2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (7.4.10)$$

С учетом изложенных допущений и соотношений (7.4.8) функционал (7.4.9) принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \Pi_{RM}(\sigma, v) &= -\frac{1}{2} \int_V \sigma^T S \sigma dV + \\ &+ \int_V \sigma^T f(z) L(x, y) v dV - \int_S q w dS. \end{aligned} \quad (7.4.11)$$

Как уже отмечалось, основной трудностью при применении смешанного функционала является согласованный выбор аппроксимаций для перемещений v и напряжений σ . Число параметров напряжений n_σ и перемещений n_d должно удовлетворять неравенству (7.1.1). При этом для изгибаемой пластины (без мембранных деформаций) имеется три перемещения элемента пластины как жесткого тела ($q_r = 3$).

Аппроксимацию для перемещений принимаем в виде полинома второго порядка, как и для конечного элемента *PL2W18*, рассмотренного в параграфе 5.3 (см. (5.3.7) при $n=6$):

$$v = N(x, y) d_e. \quad (7.4.12)$$

3×1
 3×18
 18×1

Для напряжений σ выбирается аппроксимация, удовлетворяющая двум уравнениям равновесия (в направлениях x и y):

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} &= 0; \\ \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} &= 0.\end{aligned}\quad (7.4.13)$$

Общее число параметров напряжений согласно (7.1.1) при $n_d = 18$ и $q_r = 3$ должно быть $n_p \geq 15$. Принимаем для напряжений в плоскости пластины (σ_x , σ_y , σ_{xy}) квадратичную аппроксимацию по координатам x , y и линейную аппроксимацию по координате z (принято, что мембранные деформации отсутствуют и изгиб пластины совершается поперечной нагрузкой):

$$\begin{aligned}\sigma_x &= z(\beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2); \\ \sigma_y &= z(\beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{12} y^2); \\ \sigma_{xy} &= z(\beta_{13} + \beta_{14} x + \beta_{15} y + \beta_{16} x^2 + \beta_{17} xy + \beta_{18} y^2).\end{aligned}$$

Из уравнения равновесия (7.4.13) определяем аппроксимации для напряжений поперечного сдвига σ_{xz} и σ_{yz} . Используя статические граничные условия (7.4.10) и уравнения равновесия (7.4.13), находим окончательный вид аппроксимаций для напряжений, которые содержат $n_p = 18$ ($n_p > 15$) независимых коэффициентов:

$$\begin{aligned}\sigma_x &= z A_2(x, y); \quad \sigma_y = z A_4(x, y); \quad \sigma_{xy} = z A_6(x, y); \\ \sigma_{xz} &= \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) A_8(x, y); \quad \sigma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right) A_{10}(x, y).\end{aligned}\quad (7.4.14)$$

Здесь аппроксимирующие функции по координатам x , y имеют следующий вид:

$$\begin{aligned}A_2 &= \beta_1 + \beta_2 x + \beta_3 y + \beta_4 x^2 + \beta_5 xy + \beta_6 y^2; \\ A_4 &= \beta_7 + \beta_8 x + \beta_9 y + \beta_{10} x^2 + \beta_{11} xy + \beta_{12} y^2; \\ A_6 &= \beta_{13} + \beta_{14} x + \beta_{15} y + \beta_{16} x^2 + \beta_{17} xy + \beta_{18} y^2; \\ A_8 &= \beta_2 + \beta_{15} + (2\beta_4 + \beta_7)x + (\beta_5 + 2\beta_{18})y; \\ A_{10} &= \beta_{14} + \beta_9 + (2\beta_{16} + \beta_{11})x + (\beta_{17} + 2\beta_{12})y.\end{aligned}\quad (7.4.15)$$

Подставляя трехмерные аппроксимации (7.4.14) в интеграл дополнительной энергии (7.4.5), можно аналитически проинтегрировать ее по координате z :

$$\begin{aligned}\int_V \Phi_0(\sigma_{ij}) dV &= \iint_S \int_{-h/2}^{h/2} \sigma^T S \sigma dz dS = \\ &= \iint_S \mathbf{a}^T \mathbf{R} dS.\end{aligned}\quad (7.4.16)$$

Здесь $\mathbf{a}^T = \{A_2, A_4, A_{10}, A_8, A_6\}$; матрица $\mathbf{R}$ определяется интегрированием удельной дополнительной энергии по толщине пластины:

$$\mathbf{R} = \frac{h^3}{12} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_x} & -\frac{\nu_{xy}}{E_x} & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\nu_{yx}}{E_y} & \frac{1}{E_y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{G_{yz}} \frac{h^2}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xz}} \frac{h^2}{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{G_{xy}} \end{bmatrix}$$

Аппроксимацию для напряжений по координатам x и y (7.4.15) можно записать в матричном виде:

$$\underset{5 \times 1}{\mathbf{a}} = \underset{5 \times 18}{\mathbf{P}}(x, y) \underset{18 \times 1}{\boldsymbol{\beta}}, \quad (7.4.17)$$

где $\boldsymbol{\beta}^T = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{18}\}$, а матрица $\mathbf{P}$ легко определяется из соотношений (7.4.15).

Дополнительная энергия пластины (7.4.16) с учетом (7.4.17) выражается через параметры напряжений $\boldsymbol{\beta}$ в виде квадратичной формы:

$$\int_V \Phi_0(\sigma_{ij}) dV = \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\beta}, \quad (7.4.18)$$

где матрица $\mathbf{H}$ определяется численным интегрированием по площади треугольника:

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \iint_{S_e} \mathbf{P}^T \mathbf{R} \mathbf{P} dS = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} \mathbf{P}^T \mathbf{R} \mathbf{P} |\det \mathbf{J}| dL_2 dL_1, \end{aligned} \quad (7.4.19)$$

где $\det \mathbf{J} = 2\Delta$ — детерминант якобиана преобразования глобальных координат x, y в локальные координаты L_1, L_2 (5.3.13); Δ — площадь треугольного конечного элемента.

Второй член функционала (7.4.11) с учетом (7.4.14), (7.4.17) и (7.4.12) также можно проинтегрировать по координате z :

$$\begin{aligned} \iiint_{V_e} \sigma^T f(z) L(x, y) v dV &= \frac{h^3}{12} \iint_{S_e} \beta^T P^T B d_e dS = \\ &= \beta^T Q d_e. \end{aligned} \quad (7.4.20)$$

$1 \times 18 \quad 18 \times 18 \quad 18 \times 1$

Здесь $B = L(x, y) N$ — матрица, определяющая производные от перемещений через узловые перемещения. В (7.4.20) матрица Q определяется численным интегрированием по площади треугольника:

$$Q = \frac{h^3}{12} \int_0^1 \int_0^{1-L_1} P^T B |\det J| dL_2 dL_1. \quad (7.4.21)$$

Работа внешних сил в функционале (7.4.11) для случая распределенной нагрузки определяется в виде

$$\iint_{S_e^*} q w dS = d_e^T F_e, \quad (7.4.22)$$

$1 \times 18 \quad 18 \times 1$

где $F_e^T = \{F_1^e, F_2^e, \dots, F_{18}^e\}$ — эквивалентные узловые силы:

$$\begin{aligned} F_e &= \iint_{S_e^*} q N^T R dS = \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-L_1} q N^T R |\det J| dL_1 dL_2. \end{aligned} \quad (7.4.23)$$

$18 \times 1 \quad 18 \times 3 \quad 3 \times 1$

Здесь $R^T = \{0, 0, 1\}$.

Матрицу узловых сил (7.4.23) в случае равномерно распределенной нагрузки q можно определить аналитическим интегрированием:

$$F_e^T = \{0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1/3 q \Delta, 0, 0, 1/3 q \Delta, 0, 0, 1/3 q \Delta\},$$

где Δ — площадь треугольника.

Матрица жесткости конечного элемента определяется по формуле (7.2.24) с использованием матриц (7.4.19) и (7.4.21):

$$K_e = \begin{matrix} Q^T & H^{-1} & Q \\ 18 \times 18 & 18 \times 18 & 18 \times 18 \quad 18 \times 18 \end{matrix}. \quad (7.4.24)$$

После решения системы уравнений (7.2.25) для всей конструкции определяются параметры перемещений:

$$\mathbf{d} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}. \quad (7.4.25)$$

Эти перемещения в каждом конечном элементе подставляются в формулу (7.2.22), и определяются параметры напряжений:

$$\underset{18 \times 1}{\sigma} = \underset{18 \times 18}{\mathbf{H}}^{-1} \underset{18 \times 18}{\mathbf{Q}} \underset{18 \times 1}{\mathbf{d}_e}. \quad (7.4.26)$$

Далее по формулам (7.4.17) и (7.4.14) вычисляются напряжения в каждом конечном элементе. В случае необходимости из напряжений по формулам (1.4.4) можно вычислить моменты и поперечные силы.

Рассмотренный треугольный конечный элемент пластины обозначаем через $PLW18\sigma18$ (PL — пластина; $W18$ — 18 степеней свободы по перемещениям; $\sigma18$ — 18 параметров напряжений).

Исследуем свойства сходимости рассмотренного конечного элемента $PLW18\sigma18$. Рассмотрим два тестовых примера: пример № 1 — свободно опертая квадратная пластина, нагруженная в центре сосредоточенной силой P ; пример № 2 — такая же пластина, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой q .

Пример № 1. Принимаем следующие значения упругих модулей трансверсально-изотропного материала, геометрических размеров и нагрузок на пластину: $E_x = E_y = 2 \cdot 10^5$ МПа; $\nu_{xy} = 0,3$; $G_{xy} = E_x/2(1 + \nu_{xy})$; $G_{xz} = G_{yz} = E_x/10$; $a = 1,00$ м; $h = 0,20$ м; $P = -10^4$ Н.

Ввиду симметрии граничных условий и нагрузок рассматривается 1/4 пластины (рис. 7.7). При этом граничные условия следующие:

- 1) $w = 0$ при $x = a/2$;
- 2) $w = 0$ при $y = a/2$;
- 3) $\gamma_x = 0$ при $x = 0$;
- 4) $\gamma_y = 0$ при $y = 0$.

На рис. 7.7 показана разбивка $N=1$ (2 конечных элемента на 1/4 пластины), $N=2$ (8 конечных элементов) и $N=4$ (32 конечных элемента). Результаты расчета приведены в табл. 7.2.

Некоторые различия в результатах, полученных на основе конечных элементов $PL2W18$ и $PLW18\sigma18$, можно объяснить различиями в принятых допущениях относительно распределения напряжений по толщине пластины. Из анализа результатов табл. 7.2 видно, что уже при весьма грубой разбивке пла-

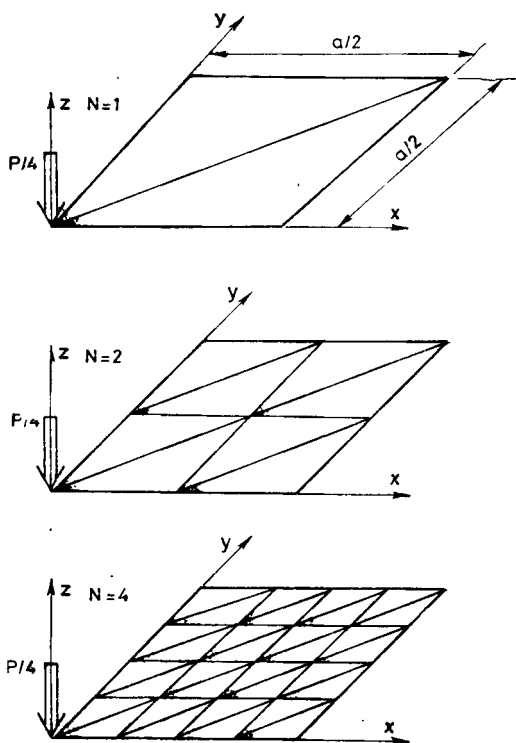


Рис. 7.7. Изгиб свободно опертой прямоугольной пластины под действием сосредоточенной силы в центре

стины конечный элемент $PLW18\sigma18$ дает хорошие результаты.

Пример № 2. В этом случае пластина нагружена распределенной нагрузкой $q = -10$ МПа. Остальные исходные данные и граничные условия такие же, как в примере № 1.

В последнем столбце табл. 7.3 указан результат решения с учетом поперечных сдвигов, полученный аналитически [6]. Для свободно опертой пластины под действием равномерно

Таблица 7.2

Сходимость решения для свободно опертой квадратной пластины, нагруженной сосредоточенной силой

Конечный элемент	Прогиб в центре $w(0,0)$, м		
	$N=1$	$N=2$	$N=4$
$PLW18\sigma18$	$-0,1872 \cdot 10^{-5}$	$-0,1786 \cdot 10^{-5}$	$-0,1776 \cdot 10^{-5}$
$PL2W18$	—	$-0,2113 \cdot 10^{-5}$	$-0,2400 \cdot 10^{-5}$

Таблица 7.3

Сходимость решения для свободно опертой квадратной пластины под действием равномерно распределенной нагрузки

Конечный элемент	w_T/w_K^*			Аналитическое решение [6]
	$N=1$	$N=2$	$N=4$	
$PLW18\sigma18$	1,792	1,830	1,779	1,797
$PL2W18$	—	1,504	1,519	

* w_T — прогиб в центре с учетом поперечных сдвигов; $w_K = 0,00406 qa^4/D$ ($D = E_x h^3/12(1-\nu_{xy}^2)$) — прогиб в центре по классической теории [77].

распределенной нагрузки прогиб в центре согласно работе [6] определяется по формуле

$$w_T/w_K = 1 + \frac{1,8145 \cdot E_x h^2}{(1 - \nu_{xy}^2) a^2 G_{xz}}.$$

В табл. 7.3 показан также результат решения с использованием конечного элемента метода перемещений $PL2W18$.

Таким образом, эти примеры показывают, что гибридные конечные элементы при грубой разбивке могут давать более точные результаты, чем конечные элементы метода перемещений. Причем при применении гибридных конечных элементов на основе смешанных функционалов время формирования матрицы жесткости больше, чем при использовании метода перемещений, так как в гибридной схеме метода конечных элементов необходимо обращать матрицу податливости для каждого конечного элемента. Однако это может компенсироваться уменьшением общего количества неизвестных и увеличением точности определения напряжений. Различные формы выбора аппроксимации в смешанных и гибридных схемах открывают возможности для их широкого применения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

ГЕОМЕТРИЯ ОБОЛОЧКИ

Тонкая оболочка представляет собой трехмерное тело, для которого можно принять, что один его размер, называемый толщиной оболочки, намного меньше любого другого его размера. Оболочку можно определить как область пространства, заключенную между внешней S^+ и внутренней S^- поверхностями, симметрично расположенными относительно срединной поверхности оболочки S (рис. П1.1). Кроме того, область оболочки определяет нормальная к S граничная поверхность, пересечение которой с поверхностью S образует линию c , определяющую контур границы оболочки.

Выбираем систему нормальных координат x^i с линиями координат x^α и базисными векторами a_α на поверхности S и x_3 в направлении внешней нормали a_3 (рис. П1.1). Расстояние между S^+ и S^- , измеряемое вдоль нормали a_3 , называется толщиной оболочки h .

Приведем некоторые краткие сведения из геометрии оболочки, а также необходимые формулы тензорной алгебры, которые используются в данной работе. Более подробные сведения о геометрии поверхностей можно найти в работах [27, 72].

Положение точки M на эквидистантной поверхности (любой поверхности $x_3 = \text{const}$ между поверхностями S^+ и S^-) характеризует радиус-вектор (рис. П1.2):

$$\bar{r}(x^i) = r(x^\alpha) + x_3 a_3. \quad (\text{П1.1})$$

Здесь $r(x^\alpha)$ — радиус-вектор срединной поверхности оболочки. Базисные векторы пространства оболочки для произвольной точки на эквидистантной поверхности определяются как производные функции $\bar{r}$ [13, 27, 72]:

$$g_\alpha(x^i) = \bar{r}_{, \alpha} = a_\alpha + x_3 a_{3, \alpha}; \quad g_3 = \bar{r}_{, 3} = a_3, \quad (\text{П1.2})$$

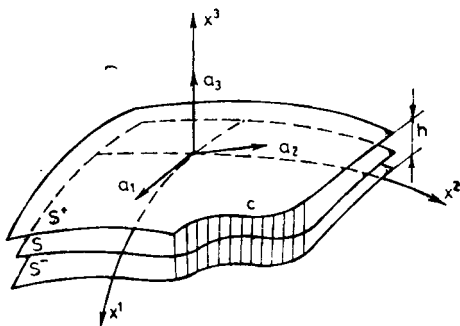


Рис. П1.1. Определение пространства оболочки и системы координат на срединной поверхности

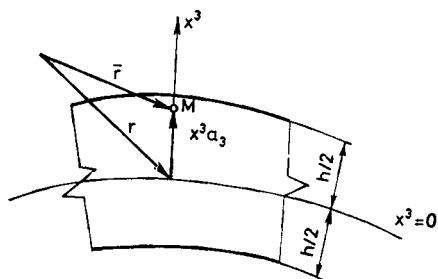


Рис. П1.2. Определение точки на эквидистантной поверхности

где

$$a_{\alpha} = r_{,\alpha} = g_{\alpha}(x^{\alpha}, 0). \quad (\text{П1.3})$$

В (П1.2) производная $a_{3,\alpha}$ характеризует скорость изменения направления нормали к поверхности при движении вдоль координатных линий, т. е. кривизну поверхности. Величина, которая характеризует кривизну поверхности, называется вторым тензором поверхности, а его компоненты $b_{\alpha\beta}$ определяются по формулам [13, 27, 72]

$$b_{\alpha\beta} = -a_{\alpha} \cdot a_{3,\beta} = -a_{\beta} \cdot a_{3,\alpha} = a_3 \cdot a_{\alpha,\beta} = a_3 \cdot a_{\beta,\alpha}. \quad (\text{П1.4})$$

Здесь производные вектора нормали $a_{3,\alpha}$ определяются по формуле Вейнгартена [13, 27, 72]

$$a_{3,\alpha} = -b_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda}. \quad (\text{П1.5})$$

С учетом этой формулы соотношения (П1.2) можно записать в виде

$$g_{\alpha} = a_{\alpha} - x_3 b_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda} = \mu_{\alpha}^{\lambda} a_{\lambda}, \quad (\text{П1.6})$$

где μ_{β}^{α} — так называемый тензор оболочки:

$$\mu_{\beta}^{\alpha} = \delta_{\beta}^{\alpha} - x_3 b_{\beta}^{\alpha}. \quad (\text{П1.7})$$

Компоненты метрического тензора пространства оболочки g_{ij} с учетом (П1.2) и (П1.6) определяются в виде

$$g_{\alpha\beta} = g_{\alpha} \cdot g_{\beta} = \mu_{\alpha}^{\lambda} \mu_{\beta}^{\tau} a_{\lambda\tau};$$

$$g_{\alpha 3} = g_{\alpha} \cdot g_3 = 0; \quad g_{33} = g_3 \cdot g_3 = 1, \quad (\text{П1.8})$$

где $a_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора срединной поверхности (первого тензора поверхности):

$$a_{\alpha\beta} = a_{\alpha} \cdot a_{\beta};$$

$$\delta_{\beta}^{\alpha} = a^{\alpha} \cdot a_{\beta};$$

$$a^{\alpha\beta} = a^{\alpha} \cdot a^{\beta}. \quad (\text{П1.9})$$

Тензор $a_{\alpha\beta}$ определяет метрические свойства (внутреннюю геометрию) поверхности, и с помощью этого тензора проводятся операции поднятия и пускания индексов тензоров поверхности. Тензор $b_{\alpha\beta}$ определяет кривизну

(внешнюю геометрию) поверхности. Этот тензор полностью определяет геометрию поверхности, а с учетом тензора μ_{β}^{α} (Пл.7) — и геометрию всей оболочки. Однако обе функции — $a_{\alpha\beta}$ и $b_{\alpha\beta}$ — не могут быть произвольными, а должны удовлетворять уравнениям Гаусса и Кодаци [13, 27, 72].

Компоненты первого тензора поверхности $a_{\alpha\beta}$ для каждой конкретной поверхности вычисляются по формулам (Пл.9) и (Пл.3) из заданных функций $a_{\alpha}(x^{\alpha})$ и $g(x^{\alpha})$. Компоненты второго тензора поверхности в линиях главных кривизн связаны с главными кривизнами поверхности k_1 и k_2 [13, 27, 72]:

$$b_{\beta}^{\alpha} = b_{\beta\lambda} a^{\lambda\alpha} = \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{R_2} \end{bmatrix} \quad (\text{Пл.10})$$

где R_1, R_2 — главные радиусы кривизн поверхности.

В координатах главных кривизн оболочки компоненты первого тензора поверхности выражаются через коэффициенты Ляме A_1 и A_2 :

$$a_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1^2 & 0 \\ 0 & A_2^2 \end{bmatrix} \quad (\text{Пл.11})$$

Определим два часто используемых инварианта поверхности — среднюю H и гауссову K кривизны поверхности:

$$H = \frac{1}{2} b_{\alpha}^{\alpha} = \frac{1}{2} (b_1^1 + b_2^2) = \frac{1}{2} (k_1 + k_2);$$

$$K = \det(b_{\beta}^{\alpha}) = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2 = k_1 \cdot k_2. \quad (\text{Пл.12})$$

С учетом (Пл.7) и (Пл.12) определяем также детерминант тензора оболочки:

$$\mu = \det(\mu_{\beta}^{\alpha}) = \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - 2x_3 H + x_3^2 K, \quad (\text{Пл.13})$$

где

$$a = \det(a_{\alpha\beta}); \quad g = \det(g_{ij}).$$

При выводе физических соотношений (см. параграф 1.5) необходима инверсия тензора оболочки $(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} ((\mu^{-1})^{\alpha}_{\beta} \mu_{\beta}^{\gamma} = \delta_{\beta}^{\alpha})$, которая получена в работах [13, 62, 128] и выражается в виде рациональной функции от x_3 :

$$(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} = \frac{1}{\mu} [\delta_{\beta}^{\alpha} + x_3 (b_{\beta}^{\alpha} - 2H \delta_{\beta}^{\alpha})], \quad (\text{Пл.14})$$

или в виде полинома по степеням координаты x_3 :

$$(\mu^{-1})_{\beta}^{\alpha} = \sum_{n=0}^{\infty} ({}^n b)_{\beta}^{\alpha} (x_3)^n, \quad (\text{Пл.15})$$

где коэффициенты ряда $({}^nb)_{\beta}{}^{\alpha}$ определяются через компоненты второго тензора поверхности:

$$({}^nb)_{\beta}{}^{\alpha} = \underbrace{b_{\lambda}{}^{\alpha} b_{\tau}{}^{\lambda} \dots b_{\beta}{}^{\tau}}_{n \text{ раз}};$$

$$({}^0b)_{\beta}{}^{\alpha} = \delta_{\beta}{}^{\alpha}; \quad ({}^1b)_{\beta}{}^{\alpha} = b_{\beta}{}^{\alpha}. \quad (\text{П1.16})$$

Инверсия тензора оболочки $(\mu^{-1})_{\beta}{}^{\alpha}$ определяет связь между контравариантными компонентами базисных векторов пространства и поверхности и между контравариантными компонентами метрических тензоров пространства и поверхности:

$$g^{\alpha} = (\mu^{-1})_{\lambda}{}^{\alpha} a^{\lambda};$$

$$g^{\alpha\beta} = g^{\alpha} \cdot g^{\beta} = (\mu^{-1})_{\lambda}{}^{\alpha} (\mu^{-1})_{\nu}{}^{\beta} a^{\lambda\nu}. \quad (\text{П1.17})$$

В тензорном исчислении в криволинейных координатах часто приходится пользоваться дискриминантным тензором срединной поверхности $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$, компоненты которого определяются в виде

$$\varepsilon^{*12} = -\varepsilon^{*21} = \sqrt{a}; \quad \varepsilon^{*12} = -\varepsilon^{*21} = \frac{1}{\sqrt{a}}; \quad \varepsilon^{*11} = \varepsilon^{*22} = \varepsilon^{*11} = \varepsilon^{*22} = 0. \quad (\text{П1.18})$$

Дискриминантные тензоры пространства ε_{ijk} и срединной поверхности $\varepsilon^*_{\alpha\beta}$ связаны зависимостями

$$\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{g}{a}} \varepsilon^*_{\alpha\beta}; \quad \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} = \sqrt{\frac{a}{g}} \varepsilon^{* \alpha\beta}. \quad (\text{П1.19})$$

Компоненты некоторого вектора или тензора T можно определить либо в пространственном базисе g_i , либо в базисе срединной поверхности $\{a_{\alpha}; a_3\}$:

$$T = T^i g_i; \quad T = T^{\alpha} a_{\alpha} + T^3 a_3;$$

$$T = T^{ij} g_i \otimes g_j; \quad T = T^{\alpha\beta} a_{\alpha} \otimes a_{\beta} +$$

$$+ T^{\alpha 3} a_{\alpha} \otimes a_3 + T^{3\alpha} a_3 \otimes a_{\alpha} + T^{33} a_3 \otimes a_3. \quad (\text{П1.20})$$

Компоненты тензоров в базисе пространства обозначены чертой. Сравнение разложений (П1.20) в различных базисах с учетом (П1.6) и (П1.17) приводит к зависимостям между компонентами тензора T в базисе пространства g_i и в базисе срединной поверхности. Для тензора T ранга $r+s$ эти соотношения выражаются в следующем виде:

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} = T_{\tau_1 \dots \tau_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} (\mu^{-1})_{\nu_1}^{\beta_1} \dots (\mu^{-1})_{\nu_s}^{\beta_s} \mu_{\alpha_1}^{\tau_1} \dots \mu_{\alpha_r}^{\tau_r};$$

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_r}^{\beta_1 \dots \beta_s} = T_{\tau_1 \dots \tau_r}^{\nu_1 \dots \nu_s} \mu_{\nu_1}^{\beta_1} \dots \mu_{\nu_s}^{\beta_s} (\mu^{-1})_{\alpha_1}^{\tau_1} \dots (\mu^{-1})_{\alpha_r}^{\tau_r}. \quad (\text{П1.21})$$

Определяем операцию ковариантного дифференцирования $(|)$ тензоров в базисе g_i :

$$T_i|_j = T_{i,j} - \bar{\Gamma}_{ij}{}^k T_k; \quad T|_j^i = T_{,j}{}^i + \bar{\Gamma}_{kj}{}^i T^k;$$

$$T_j|_k{}^i = T_{j,k}{}^i + \bar{\Gamma}_{kl}{}^i T_j{}^l - \bar{\Gamma}_{jk}{}^l T_l{}^i.$$

Здесь $\bar{\Gamma}_{ij}^k$ — символы Кристоффеля второго рода в базисе пространства, которые выражаются через символы Кристоффеля первого рода $\bar{\Gamma}_{ijk}$:

$$\bar{\Gamma}_{jk}^i = g^{il} \bar{\Gamma}_{jkl};$$

$$\bar{\Gamma}_{ijk} = g_i \cdot g_{j,k} = \frac{1}{2} (g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}).$$

Аналогично определяется операция ковариантного дифференцирования ($|$) тензоров в базисе срединной поверхности $\{a_\alpha; a_3\}$:

$$T_{\alpha\beta} = T_{\alpha,\beta} - \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda T_\lambda; \quad T_{\beta\alpha} = T_{,\beta}^\alpha + \Gamma_{\lambda\beta}^\alpha T^\lambda;$$

$$T_{\beta||\gamma}^\alpha = T_{\beta,\gamma}^\alpha + \Gamma_{\gamma\lambda}^\alpha T_\beta^\lambda - \Gamma_{\beta\gamma}^\lambda T_\lambda^\alpha. \quad (П1.22)$$

Здесь символы Кристоффеля срединной поверхности определяются через компоненты метрического тензора поверхности:

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta,\gamma} + a_{\alpha\gamma,\beta} - a_{\beta\gamma,\alpha});$$

$$\Gamma_{\beta\gamma}^\alpha = a^{\alpha\lambda} \Gamma_{\beta\gamma\lambda};$$

$$\Gamma_{\beta 3}^\alpha = -b_\beta^\alpha; \quad \Gamma_{33}^\alpha = 0; \quad \Gamma_{\alpha\beta}^3 = b_{\alpha\beta};$$

$$\Gamma_{\alpha 3}^3 = 0; \quad \Gamma_{33}^3 = 0. \quad (П1.23)$$

При решении краевых задач компоненты векторов и тензоров определяются в нормированном базисе $\{a_\alpha/|a_\alpha|; a_3\}$. Это так называемые физические компоненты тензоров, которые определяются через тензорные компоненты по известным формулам [72]:

$$T_{(\alpha\beta)} = T_{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a^{\alpha\alpha}}{a_{\beta\beta}}}; \quad T_{(\alpha)} = T_\alpha \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}};$$

$$T_{(\alpha\beta)} = T^{\alpha\beta} \sqrt{\frac{a_{\beta\beta}}{a^{\alpha\alpha}}}; \quad T_{(\alpha)} = T^\alpha \frac{1}{\sqrt{a^{\alpha\alpha}}};$$

$$T_{(\alpha\beta)} = T_\beta^\alpha \sqrt{\frac{1}{a^{\alpha\alpha} a_{\beta\beta}}}. \quad (П1.24)$$

Рассмотрим далее некоторые наиболее часто употребляемые типы поверхностей.

Оболочки вращения. Геометрия поверхности вращения в трехмерном декартовом пространстве (x, y, z) задается с помощью цилиндрической системы координат r, φ, z (рис. П1.3). В качестве криволинейных координат на поверхности, в которых определяются функции, характеризующие деформированное состояние оболочки, выбираются координата по меридиану $x^1 = S$ и координата по окружности $x^2 = \varphi$. Координата в направлении нормали поверхности a_3 обозначается через x_3 . Эти координаты образуют левую систему координат. Поверхность вращения образуется вращением произвольной кривой (меридиана) вокруг оси z . Из рис. П1.4 видно, что существует следующая зависимость между координатами r, z и s :

$$\frac{dr}{ds} = \sin \theta; \quad \frac{dr}{dz} = \operatorname{tg} \theta; \quad \frac{dz}{dr} = \operatorname{ctg} \theta; \quad \frac{dz}{ds} = \cos \theta, \quad (П1.25)$$

где θ — угол между осью вращения и касательной к меридиану. Если

задано уравнение меридиана $r(z)$, то поверхность вращения описывается радиусом-вектором $\mathbf{r}(z, \varphi)$:

$$\mathbf{r}(z, \varphi) = r(z) \cos \varphi \mathbf{i}_1 + r(z) \sin \varphi \mathbf{i}_2 + z \mathbf{i}_3,$$

где $\mathbf{i}_1, \mathbf{i}_2, \mathbf{i}_3$ — базис декартовой системы координат x, y, z .

Согласно формулам (П1.3) базисные векторы координатной системы s, φ определяются в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial s} = \frac{dr}{ds} \cos \varphi \mathbf{i}_1 + \frac{dr}{ds} \sin \varphi \mathbf{i}_2 + \frac{dz}{ds} \mathbf{i}_3; \\ \mathbf{a}_2 &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = -r \sin \varphi \mathbf{i}_1 + r \cos \varphi \mathbf{i}_2. \end{aligned} \quad (\text{П1.26})$$

Из этих соотношений по формулам (П1.9) с учетом ортогональности декартовых базисных векторов ($\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = 0$ при $k \neq m$, $\mathbf{i}_k \cdot \mathbf{i}_m = 1$ при $k = m$) вычисляются компоненты первого тензора поверхности вращения:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1; \quad a_{22} = \mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{a}_2 = r^2; \\ a_{12} &= a_{21} = 0; \\ a^{11} &= 1; \quad a^{22} = \frac{1}{r^2}; \\ a^{12} &= a^{21} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.27})$$

Далее определяем компоненты второго тензора поверхности для оболочки вращения. Используя векторное произведение базисных векторов (П1.26), получаем выражение для вектора нормали $\mathbf{a}_3$. Используя формулу векторного

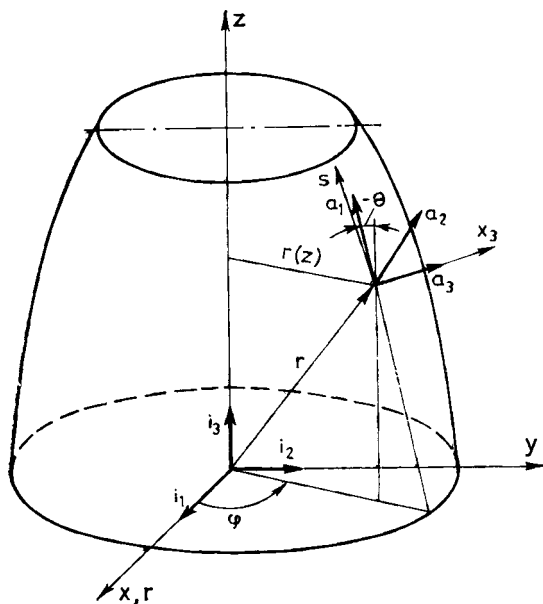


Рис. П1.3. Геометрия оболочки вращения

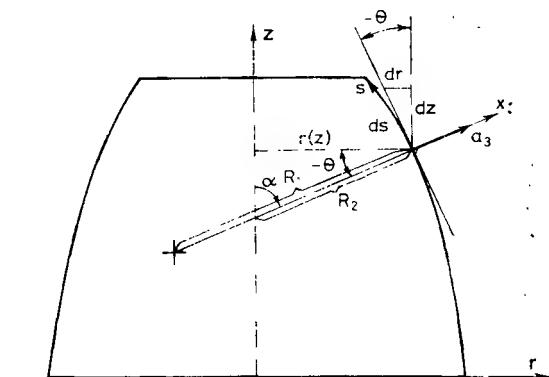


Рис. П1.4. Геометрия меридиана оболочки вращения

произведения векторов, а также зависимости (П1.18), (П1.26) и (П1.27), получаем

$$\begin{aligned} a_3 &= -\frac{1}{2} \varepsilon_{*}^{\beta\alpha} (a_\alpha \times a_\beta) = -\frac{1}{\sqrt{a}} (a_1 \times a_2) = \\ &= \cos \theta \cos \varphi i_1 + \cos \theta \sin \varphi i_2 - \sin \theta i_3. \end{aligned} \quad (\text{П1.28})$$

Отметим, что вектор нормали a_3 определен для левой системы координат (см. рис. П1.3). С помощью формул (П1.4) и с учетом (П1.25), (П1.26) и (П1.28) вычисляем компоненты второго тензора поверхности для оболочки вращения:

$$\begin{aligned} b_{11} &= a_{1,1} \cdot a_3 = \frac{d\theta}{ds}; \\ b_{22} &= a_{2,2} \cdot a_3 = -r \cos \theta; \\ b_{12} &= b_{21} = 0. \end{aligned} \quad (\text{П1.29})$$

Здесь при преобразованиях использованы следующие формулы:

$$\frac{d^2 r}{ds^2} = \cos \theta \frac{d\theta}{ds}; \quad \frac{d^2 z}{ds^2} = -\sin \theta \frac{d\theta}{ds}. \quad (\text{П1.30})$$

Из (П1.29), совершив по формулам (П1.24) переход на физические компоненты второго тензора поверхности $b_{(\alpha\beta)}$ или по формуле $b_\beta^\alpha = b_{\beta\lambda} a^{\lambda\alpha}$ — переход на смешанные компоненты второго тензора поверхности, получим

$$b_{(\alpha\beta)} = b_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} \frac{d\theta}{ds} & 0 \\ 0 & -\frac{\cos \theta}{r} \end{bmatrix} \quad (\text{П1.31})$$

С учетом (П1.30) и (П1.25) имеем

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d}{ds} \operatorname{arctg} \left(\frac{dr}{dz} \right) = \frac{\frac{d^2 r}{dz^2}}{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz} \right)^2 \right]^{3/2}}. \quad (\text{П1.32})$$

Из формул (П1.10), (П1.25), (П1.31) и (П1.32) получаем выражения для главных радиусов кривизн оболочки вращения:

$$R_1 = -\frac{1}{k_1} = -\frac{1}{d\theta/ds} = -\frac{\left[1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2\right]^{3/2}}{\frac{d^2r}{dz^2}};$$

$$R_2 = -\frac{1}{k_2} = \frac{r}{\cos \theta} = r\sqrt{1 + \tan^2 \theta} = r\sqrt{1 + \left(\frac{dr}{dz}\right)^2}. \quad (\text{П1.33})$$

По формулам (П1.23) с учетом (П1.27), (П1.29) и (П1.31) определяются символы Кристоффеля для оболочки вращения:

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{\sin \theta}{r}; \quad \Gamma_{22}^1 = -r \sin \theta; \quad \Gamma_{13}^1 = -b_1^1 = -\frac{d\theta}{ds};$$

$$\Gamma_{23}^2 = -b_2^2 = \frac{\cos \theta}{r}; \quad \Gamma_{11}^3 = b_{11} = \frac{d\theta}{ds}; \quad \Gamma_{22}^3 = b_{22} = -r \cos \theta. \quad (\text{П1.34})$$

Остальные компоненты символов Кристоффеля равны нулю.

Для ряда частных случаев оболочек вращения имеем следующие значения геометрических параметров:

1) для конической оболочки $\theta = \text{const}$, $r(z)$ — линейная функция от координаты z (рис. П1.5),

$$a_{11} = 1; \quad a_{22} = r^2; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = -\frac{\cos \theta}{r};$$

2) для цилиндрической оболочки радиусом R $\theta = 0$, $r = R = \text{const}$ (рис. П1.6),

$$a_{11} = 1; \quad a_{22} = R^2; \quad k_1 = 0; \quad k_2 = -\frac{1}{R}.$$

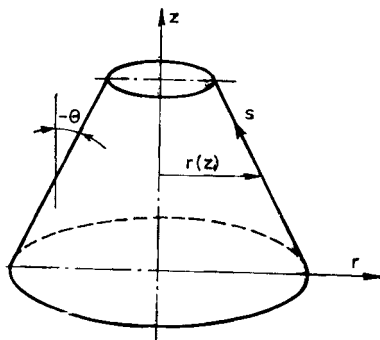


Рис. П1.5. Геометрия конической оболочки

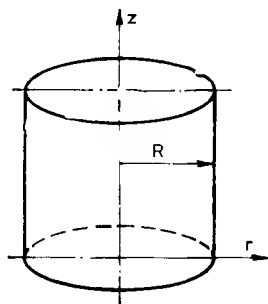


Рис. П1.6. Геометрия цилиндрической оболочки

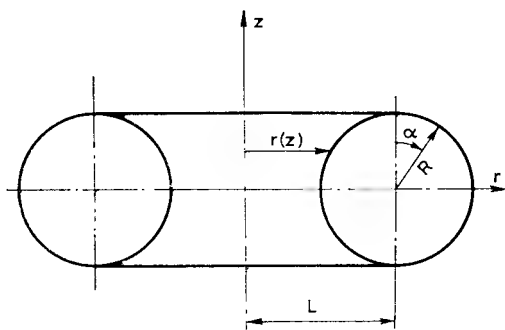


Рис. П1.7. Геометрия торондальной оболочки

Для замкнутых в вершине оболочек вращения, например для замкнутых сферических оболочек, торондальных оболочек и др., более удобно использовать систему координат $x^1 = \alpha$; $x^2 = \varphi$, где $\alpha = 90^\circ + \theta$ — угол между осью вращения и направлением нормали. Связь между координатами s и α определяется зависимостью (см. рис. П1.4)

$$ds = -R_1 d\alpha. \quad (\text{П1.35})$$

С учетом этой формулы и соотношений (П1.25) из выражений (П1.26) и (П1.27) получаем

$$\begin{aligned} a_{11} &= R_1^2; & a_{22} &= r^2; \\ a^{11} &= \frac{1}{R_1^2}; & a^{22} &= \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \quad (\text{П1.36})$$

С учетом зависимостей $\theta = \alpha - 90^\circ$, $d\theta = d\alpha$ и (П1.35) имеем

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\theta}{d\alpha} \frac{d\alpha}{ds} = -\frac{1}{R_1}; \quad \cos \theta = \sin \alpha; \quad \sin \theta = -\cos \alpha.$$

С учетом этих соотношений компоненты второго тензора поверхности в рассматриваемой координатной системе получаются из формул (П1.29) и (П1.31):

$$\begin{aligned} b_{11} &= -R_1; & b_{22} &= -r \sin \alpha; \\ b_{(\alpha\beta)} &= b_\beta^\alpha = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1} & 0 \\ 0 & -\frac{\sin \alpha}{r} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (\text{П1.37})$$

Для ряда частных случаев оболочек вращения в рассматриваемой координатной системе имеем следующие значения геометрических параметров:

1) для сферической оболочки радиусом R

$$\begin{aligned} R_1 &= R; & r &= R \sin \alpha; \\ a_{11} &= R^2; & a_{22} &= R^2 \sin^2 \alpha; \\ b_1^1 &= b_2^2 = k_1 = k_2 = -\frac{1}{R}; \end{aligned}$$

2) для тороидальной оболочки (рис. П1.7)

$$\begin{aligned} R_1 &= R; & r &= L + R \sin \alpha; \\ a_{11} &= R^2; & a_{22} &= (L + R \sin \alpha)^2; \\ b_1^1 &= k_1 = -\frac{1}{R}; & b_2^2 &= k_2 = -\frac{\sin \alpha}{L + R \sin \alpha}. \end{aligned}$$

Из этих величин по формулам (П1.23) легко определяются символы Кристоффеля, а также другие необходимые геометрические параметры.

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

ИТЕРАЦИОННЫЙ МЕТОД ОПРЕДЕЛЕНИЯ МИНИМАЛЬНОГО СОБСТВЕННОГО ЗНАЧЕНИЯ

При решении задач устойчивости или колебаний конструкций необходимо найти собственные значения следующего матричного уравнения:

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda \mathbf{B}\mathbf{u}. \quad (\text{П2.1})$$

Здесь $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — симметричные, положительно определенные матрицы ленточного вида, которые порождены конечноэлементной дискретизацией исходной задачи устойчивости или колебаний. При решении обычно необходимо определять не весь спектр собственных значений, а только минимальное собственное значение (в задачах устойчивости) или начальный участок спектра собственных значений (в задачах колебаний). Многие известные методы малоэффективны для решения проблемы (П2.1) с большими матрицами ленточного вида. Поэтому для решения задачи (П2.1) предложим итерационный алгоритм нахождения минимального собственного значения [65], который сводится к следующему:

1. Задается нулевое приближение для вектора $\mathbf{u}$:

$$\mathbf{u}_{(k)} = 1; \quad k=0.$$

2. Матрица $\mathbf{B}$ умножается на вектор $\mathbf{u}_{(k)}$ с использованием ленточной структуры матрицы $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F}_{(k)} = \mathbf{B}\mathbf{u}_{(k)}.$$

3. Решается система уравнений с использованием ленточной структуры матрицы $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{u}_{(k+1)} &= \mathbf{F}_{(k)}; \\ \mathbf{u}_{(k+1)} &= \mathbf{A}^{-1}\mathbf{F}_{(k)}. \end{aligned}$$

Для решения системы обычно используется метод исключения Гаусса, так как прямой ход в методе Гаусса необходимо осуществлять только на первой итерации; в последующих итерациях осуществляется только обратный ход, что значительно сокращает объем вычислений.

4. Проводится нормировка вектора $\mathbf{u}_{(k+1)}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{(k+1)} &= \mathbf{u}_{(k+1)} / \|\mathbf{u}_{(k+1)}\|; \\ \|\mathbf{u}_{(k+1)}\| &= \mathbf{u}_1^{(k+1)}. \end{aligned}$$

5. Проверяется условие окончания процесса итерации, если

$$\max_i \left| \frac{u_i^{(k+1)} - u_i^{(k)}}{u_i^{(k+1)}} \right| > \varepsilon,$$

то происходит возвращение к п. 2; в противном случае происходит переход к п. 6.

6. Определяется минимальное собственное значение:

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{u_1^{(k+1)}}.$$

Соответствующий минимальному собственному значению нормированный собственный вектор $u_{(k+1)}$ является решением задачи.

Приведем доказательство сходимости этого алгоритма простой итерации. Для симметричных, положительно определенных матриц A и B все собственные значения действительны и положительны. Предположим, что все собственные значения $\lambda_i (i=1, 2, \dots, n)$ задачи (П2.1) различны и каждому собственному значению λ_i соответствует собственный вектор $u_{(i)}$, для которого выполняется равенство

$$Au_{(i)} = \lambda_i Bu_{(i)}, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (\text{П2.2})$$

Известно, что если собственные значения различны, то соответствующие собственные векторы образуют полную систему, т. е. любой вектор u можно представить в виде

$$u = \sum_i c_i u_{(i)}. \quad (\text{П2.3})$$

Из (П2.1) получаем следующее выражение для u :

$$u = \lambda A^{-1}Bu. \quad (\text{П2.4})$$

Рассмотрим следующее соотношение, в котором использованы формулы (П2.3) и (П2.4):

$$R_1 = \lambda \frac{A^{-1}Bu}{u} = \lambda \frac{A^{-1} \sum_i c_i Bu_{(i)}}{\sum_i c_i u_{(i)}}. \quad (\text{П2.5})$$

Подставляем в это соотношение зависимость (П2.2):

$$R_1 = \lambda \frac{\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i} u_{(i)}}{\sum_i c_i u_{(i)}}. \quad (\text{П2.6})$$

Далее, подставляя (П2.4) в (П2.1), получаем

$$u = \lambda^2 A^{-1} B A^{-1} B u. \quad (\text{П2.7})$$

По аналогии с (П2.5) составляем отношение для второй итерации:

$$R_2 = \frac{\lambda^2 A^{-1} B A^{-1} B u}{u} = \frac{\lambda A^{-1} B A^{-1} B \sum_i c_i u_{(i)}}{A^{-1} B \sum_i c_i u_{(i)}} = \lambda \frac{\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i^2} u_{(i)}}{\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i} u_{(i)}}. \quad (\text{П2.8})$$

Далее по аналогии с (П2.8) для произвольной k -й итерации можно записать следующее отношение:

$$R_k = \lambda \frac{\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i^k} u_{(i)}}{\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i^{k-1}} u_{(i)}}. \quad (\text{П2.9})$$

Собственные значения пронумеруем так, чтобы $\lambda_1 = \min_i \lambda_i$, и тогда при $k \rightarrow \infty$ имеем

$$\sum_i c_i \frac{1}{\lambda_i^k} u_{(i)} \approx c_1 \frac{1}{\lambda_1^k} u_{(1)}. \quad (\text{П2.10})$$

С учетом (П2.10) отношение (П2.9) при $k \rightarrow \infty$ принимает вид

$$R_k = \lambda \cdot \frac{1}{\lambda_1}, \quad (\text{П2.11})$$

т. е. в пределе каждая компонента вектора u при $k \rightarrow \infty$ умножается на одно и то же число $\lambda_1 = \lambda_{\min}$. Так как согласно п. 4 проводится нормировка вектора на каждом шаге так, чтобы его первая компонента была равна единице, то на последнем шаге нормирующий множитель является наименьшим собственным значением.

С помощью данного алгоритма решались различные задачи устойчивости и колебаний оболочек с конечноэлементной дискретизацией. Следует отметить, что данный алгоритм позволяет определять также второе и последующие собственные значения при использовании условия ортогональности собственных векторов. Однако в этом случае каждое следующее собственное значение будет определяться все с меньшей точностью. Тем не менее при определении наименьшего собственного значения алгоритм работает весьма эффективно, так как во второй и последующих итерациях не требуется обрабатывать матрицу A (см. п. 3). Следует также отметить весьма быструю сходимость алгоритма по числу итераций. Так, при решении задач устойчивости с $\varepsilon = 10^{-2}$ для матриц порядка 1000 с полужирной ленты 80 решение получаем всего за 5—7 итераций. Вообще алгоритм сходится тем быстрее, чем больше $\lambda_{\min}$ отделено от последующих собственных значений.

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

ОЦЕНКА ПОГРЕШНОСТИ
КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНЫХ РЕШЕНИЙ

При конечноэлементном решении непрерывная краевая задача заменяется на дискретную путем аппроксимации пробными функциями на подобластях конечных элементах. Для отыскания минимума функционала вместо непрерывной функции варьируются значения функции и ее производные (узловые неизвестные) в отдельных точках области — узлах. В этом переходе от непрерывной к дискретной задаче возникает первый тип ошибки — основная ошибка аппроксимации.

При переходе от непрерывной задачи к дискретной коэффициенты при узловых неизвестных определяются интегрированием пробных функций на подобластях — конечных элементах. Эта процедура обычно проводится численным интегрированием. Здесь возникает второй тип ошибки — ошибка численного интегрирования.

Для линейных задач условие минимума функционала по узловым неизвестным приводит к системе линейных алгебраических уравнений. Решение этой системы уравнений осуществляется на ЭВМ с конечной разрядностью чисел. Поэтому здесь возникает третий тип ошибки — ошибка вследствие округления чисел при решении больших систем уравнений на ЭВМ.

Таким образом, при замене непрерывной краевой задачи на дискретную возникают следующие ошибки:

- 1) основная ошибка аппроксимации;
- 2) ошибка численного интегрирования;
- 3) ошибка вследствие округления чисел при решении больших систем уравнений на ЭВМ.

Для линейных задач найдены теоретические оценки этих ошибок [74]. Приведем кратко основные результаты.

Основная ошибка аппроксимации. Пусть u будет точным решением, минимизирующим непрерывный функционал n -мерной эллиптической краевой задачи порядка $2m$, где m — порядок производной функции в минимизируемом функционале.

Проводится равномерная разбивка области на подобласти — конечные элементы с шагом h (в данном приложении h означает относительный размер конечного элемента), для которых проводится аппроксимация пробными функциями u_h . Минимизацией функционала в конечномерном пространстве на классе пробных функций определяется приближенное решение u_h . Если выполняются все необходимые требования при переходе от непрерывного решения к дискретному, то для приближенного решения получаем следующие оценки [74].

Энергия деформаций U приближенного решения u_h всегда меньше точной энергии деформаций [74]:

$$U(u_h, u_h) \leq U(u, u). \quad (\text{П3.1})$$

Ошибка в определении энергии деформаций имеет порядок $h^{2(k-m)}$ [74]:

$$U(u - u_h, u - u_h) = U(u, u) - U(u_h, u_h) \leq O h^{2(k-m)}. \quad (\text{П3.2})$$

Здесь $k-1$ — порядок полинома в аппроксимирующих функциях u_h . Для функции u и ее производной порядка s имеют место следующие оценки [74]:

$$\|u - u_h\|_s \leq O h^{k-s}, \quad s \geq 2m - k; \quad (\text{П3.3})$$

$$\|u - u_h\|_s \leq O h^{2(k-m)}, \quad s \leq 2m - k. \quad (\text{П3.4})$$

Здесь $\|u - u^h\|$ — мера расстояния (норма) между двумя функциями. В (П3.3) и (П3.4) $s=0$ при оценке погрешности функции, $s=1$ при оценке погрешности первой производной функции и т. д. Отметим, что во всех реальных случаях имеет место оценка (П3.3). Например, в теории типа Тимошенко ($m=1$) для конечных элементов второго порядка $k=3$, $2m-k=-1$ и порядок сходимости по перемещениям согласно (П3.3) в среднем пропорционален h^3 . По внутренним усилиям, которые определяются через первые производные от перемещений ($s=1$), порядок сходимости равен h^2 . Однако следует отметить, что в специальных точках области порядок сходимости может быть выше, чем в среднем. Например, перемещение под сосредоточенной силой определяется с ошибкой порядка ошибки энергии деформаций, т. е. ошибка пропорциональна $h^{2(k-m)}$. Для $m=1$ и $k=3$ порядок сходимости будет равен h^4 .

В задачах на определение собственных значений (колебаний, устойчивости) переход от непрерывной к дискретной задаче приводит к уравнению $Ku = \lambda Mu$, где K — матрица жесткости; M — матрица масс. Для всех собственных значений дискретной задачи λ_i^h имеются следующие оценки [74]:

$$\lambda_i^h \geq \lambda_i, \quad i = 1, 2, \dots, r. \quad (\text{П3.5})$$

Здесь λ_i — точные значения всех r собственных значений; r — число степеней свободы (количество узловых неизвестных) дискретной задачи. Оценка (П3.5) показывает, что приближенное собственное значение всегда больше точного, если выполнены все формальные условия и требования при переходе от непрерывной задачи к дискретной. Погрешность в определении собственных значений [74]

$$\lambda_i^h - \lambda_i \sim Oh^{2(k-m)} \lambda_i^{k/m}. \quad (\text{П3.6})$$

Из этой оценки видно, что порядок сходимости для собственных значений равен порядку сходимости для энергии деформаций. Однако последний множитель $\lambda_i^{k/m}$ означает, что гораздо труднее вычислить собственные значения более высоких порядков. Наименьшей ошибка будет для минимального собственного значения. Например, в теории типа Тимошенко ($m=1$) для элемента второго порядка ($k=3$) относительная ошибка определения минимальной частоты собственных колебаний λ_1 будет следующей:

$$\varepsilon = \frac{\lambda_1^h - \lambda_1}{\lambda_1} \sim Oh^4 \lambda_1^2. \quad (\text{П3.7})$$

Для высших частот порядок сходимости h^4 сохранится, однако относительная ошибка определения высших частот будет больше.

Ошибка численного интегрирования. Как известно, для приближенной минимизации функционала, т. е. для нахождения u^h , необходимо решить систему уравнений

$$Kd = F, \quad (\text{П3.8})$$

где K — матрица жесткости; d — узловые неизвестные; F — узловые силы. Энергия деформаций приближенного решения согласно (П3.1) всегда меньше точной:

$$U(u^h, u^h) = \frac{1}{2} d^T K d \leq U_T, \quad (\text{П3.9})$$

т. е. дискретная система получается более жесткой, чем исходная непрерывная система. При вычислении матрицы жесткости K численным интегриро-

ванием получаем приближенную матрицу K_* . Новое (возмущенное) решение будет следующим:

$$d_* = K_*^{-1}F. \quad (ПЗ.10)$$

Его энергия деформаций записывается в виде

$$\frac{1}{2} d_*^T K_* d_* = F^T K_*^{-1} F. \quad (ПЗ.11)$$

Для невозмущенного состояния энергия деформаций определяется следующим образом:

$$\frac{1}{2} d^T K d = F^T K^{-1} F. \quad (ПЗ.12)$$

При численном интегрировании уменьшается положительная определенность матрицы жесткости K [74]. Приближенная матрица K_* удовлетворяет неравенствам

$$d^T K d \geq d^T K_* d \geq 0 \quad (ПЗ.13)$$

при любых d . Эти неравенства равносильны неравенствам для обратных матриц

$$F^T K_*^{-1} F \geq F^T K^{-1} F \geq 0 \quad (ПЗ.14)$$

для всех F .

Отсюда и из соотношений (ПЗ.11) и (ПЗ.12) следует возрастание энергии деформаций при численном интегрировании, т. е. система становится менее жесткой после численного интегрирования. Согласно (ПЗ.9) энергия деформаций после численного интегрирования будет ближе к точной и может даже превышать ее.

Обозначим через u_*^h минимизирующую функцию, которая определяется решением приближенной системы уравнений метода конечных элементов $K_* d_* = F_*$, в которой матрица жесткости и вектор нагрузки определены численным, а не точным интегрированием. Тогда для разности $u^h - u_*^h$ имеет место следующая оценка (при $m=1$ и $s=1$) [74]:

$$\|u^h - u_*^h\|_1 \leq h^{p-k+3}. \quad (ПЗ.15)$$

Здесь p — порядок квадратурной формулы (точно интегрирует полином порядка p). Например, для n -точечной квадратурной формулы Гаусса степень точности $p=2n-1$, а результирующая ошибка имеет порядок $O(h^{2n-k+2})$. Если используется $k-1$ узлов в одномерной формуле Гаусса ($n=k-1$), то ошибка интегрирования имеет порядок $O(h^k)$, т. е. она даже ниже, чем ошибка аппроксимации деформаций $O(h^{k-1})$. Более подробно выбор порядка схемы интегрирования обсуждается в приложении 4.

Ошибка вследствие округления чисел при решении больших систем уравнений на ЭВМ. При решении уравнения $Kd=F$ приходится выполнять на ЭВМ большое количество операций умножения, деления, сложения и вычитания. Так, для метода исключения Гаусса число операций пропорционально числу уравнений и полуширине ленты матрицы жесткости в третьей степени. Так как разрядность представлений чисел в ЭВМ конечная, то при большом числе операций происходит потеря точности. Потеря точности зависит от числа обусловленности κ матрицы жесткости K :

$$\kappa(K) = \frac{\lambda_{\max}(K)}{\lambda_{\min}(K)}. \quad (ПЗ.16)$$

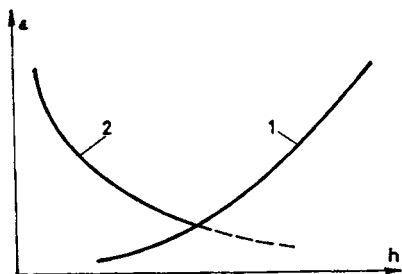


Рис. ПЗ.1. Изменение ошибки аппроксимации (1) и ошибки округления (2) при уменьшении шага

Здесь $\lambda_{\max}$ и $\lambda_{\min}$ — максимальное и минимальное собственные значения матрицы жесткости. Для оболочек и пластин, вследствие того что один геометрический размер конструкции намного меньше других, порядок числа обусловленности большой. Так, например, для реальных задач расчета оболочек число обусловленности матрицы жесткости $\kappa = 10^4 - 10^6$. Чем меньше число обусловленности, тем меньше ошибки округления при одинаковых размерностях задач. Поэтому для плохо обусловленных матриц уменьшением шага нельзя добиться улучшения результата. При уменьшении шага уменьшается основная ошибка аппроксимации (кривая 1 на рис. ПЗ.1), но увеличивается ошибка округления (кривая 2 на рис. ПЗ.1). В этом случае улучшения результатов можно добиться повышением порядка аппроксимации, так как число обусловленности и, следовательно, ошибки округления почти не зависят от степени аппроксимирующего полинома. Для уменьшения ошибок округления используется ряд приемов: счет с двойной точностью, алгоритмы метода Гаусса, которые обходят нули, итерационное уточнение решения и методы сокращенного интегрирования для слагаемых функционала, которые ухудшают обусловленность матрицы жесткости (поперечные сдвиги, мембранные деформации). При расчете оболочек основные вычислительные трудности возникают вследствие плохой обусловленности матрицы жесткости. Кроме вышеуказанных существует еще ряд технических приемов для преодоления этих трудностей.

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

СХЕМЫ ЧИСЛЕННОГО ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Для конечных элементов оболочек и пластин матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости получают численным интегрированием. Как уже было указано в приложении 3, это вносит определенную погрешность в определение исходных матриц. Проблема выбора порядка схемы численного интегрирования состоит в том, чтобы с наименьшими затратами (минимальное количество квадратурных узлов) обеспечить требуемую точность вычисления матриц. Общее правило выбора порядка схемы состоит в том, чтобы ошибка численного интегрирования не превышала основную ошибку аппроксимации.

Для плоских конечных элементов пластин интегралы, по которым вычисляются элементы матрицы жесткости или масс, содержат полиномы степени p , которые точно интегрируются схемой r -го порядка. Этот порядок полинома можно всегда легко установить. Например, для конечного элемента изгибаемой пластины *PL2W18* (см. параграф 5.3) при вычислении матрицы жесткости (5.3.18) интегралы от деформаций изгиба содержат полиномы второго порядка, а интегралы от деформаций поперечного сдвига —

полиномы четвертого порядка. Поэтому точно матрицу жесткости вычислить численным интегрированием можно, применяя схему второго порядка для деформаций изгиба и схему четвертого порядка для деформаций поперечного сдвига. Можно для деформаций поперечного сдвига применять сокращенную схему интегрирования и вычислять всю матрицу жесткости с помощью схемы второго порядка. Матрица масс того же конечного элемента (5.3.20) в подынтегральных выражениях содержит полиномы четвертого порядка. Следовательно, точно вычислить матрицу масс можно, применяя схему четвертого порядка.

Для искривленных конечных элементов оболочки при получении матрицы жесткости применяется изопараметрическая техника (см. параграф 5.2). В этом случае матрица жесткости (5.2.17) определяется интегрированием рациональных функций, так как подынтегральные выражения содержат обратную матрицу Якоби J^{-1} . Элементы матрицы J^{-1} являются рациональными функциями (см. (5.2.13)). Однако при слабом искривлении (для очень пологих оболочек) можно считать, что в пределах элемента $J \approx \text{const}$, и интегрировать матрицу жесткости по схеме для плоской пластины. При более сильном искривлении порядок схемы интегрирования должен быть повышеи. Выбор порядка схемы для треугольных конечных элементов оболочек CAU2W30 и CAU3W50 показан в параграфе 6.2 на практическом примере. Минимально допустимый порядок схемы должен в рамках геометрической аппроксимации точно вычислять площадь искривленного элемента [47]. Например, для треугольного элемента оболочки площадь вычисляется по соотношению

$$\Delta = \int_0^{1-L_1} \int_0^L |\det J| \sqrt{a} dL_2 dL_1. \quad (\text{П4.1})$$

Для конечного элемента второго порядка CAU2W30 с учетом (5.2.13) определяем, что подынтегральное выражение в (П4.1) является полиномом второго порядка. Для элемента третьего порядка CAU3W50 подынтегральное выражение в (П4.1) является полиномом четвертого порядка. Как показано в параграфе 6.2 при анализе конкретного примера, минимально допустимый порядок схемы обеспечивает достаточную точность результата (см. первые две строки табл. 6.3).

Для тонких изотропных оболочек и пластин применяется техника выборочного или сокращенного интегрирования с целью исключения искусственного увеличения жесткости конструкции [175]. Техника выборочного интегрирования состоит в том, что элементы матрицы жесткости, связанные с энергией деформаций поперечного сдвига, интегрируются при помощи схемы, которая на один порядок ниже, чем элементы матрицы жесткости, связанные с энергией деформаций изгиба. Это позволяет избежать искусственного увеличения жесткости конструкции при расчете тонких или изотропных оболочек и пластин. Эффект искусственного увеличения жесткости сильнее проявляется для конечных элементов низших порядков и слабее — для элементов высших порядков.

Для одномерных и прямоугольных областей при численном интегрировании используются схемы Гаусса, так как при заданном количестве квадратурных узлов они обеспечивают наивысшую точность [73]. Для одномерных конечных элементов интегрирование заменяется суммой:

$$\int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i). \quad (\text{П4.2})$$

Весовые коэффициенты w_i и координаты квадратурных узлов ξ_i при числе точек от $n=2$ до $n=96$ приведены в работе [73]. Схема с n точками точно

интегрирует полином порядка $p=2n-1$ [73], где p — порядок схемы интегрирования. Для численного интегрирования в прямоугольных областях (двумерных и трехмерных) используются эти же схемы.

Для треугольных элементов более рационально использовать специальные схемы интегрирования [26, 73, 74]. Интегрирование в треугольнике заменяется суммой:

$$\int_0^1 \int_0^{1-L_1} f(L_1, L_2) dL_2 dL_1 = \sum_{i=1}^n w_i f(L_1^i, L_2^i). \quad (\text{П4.3})$$

Здесь n — число квадратурных точек; w_i — весовые коэффициенты; L_1^i, L_2^i — L -координаты квадратурных точек. Для схем разного порядка весовые коэффициенты и координаты квадратурных точек в треугольной области приведены в работах [26, 73, 74].

Отметим, что рациональный выбор схемы интегрирования и построение алгоритма вычислений подынтегральных функций могут значительно сэкономить машинное время при решении практических задач.

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

ПАКЕТ ПРИКЛАДНЫХ ПРОГРАММ КОМПОЗИТ ДЛЯ АНАЛИЗА ТОНКОСТЕННЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Системы метода конечных элементов являются составной частью систем автоматизированного проектирования конструкций (САПР). Существуют универсальные и специализированные системы МКЭ. Специализированные системы МКЭ ориентированы на расчет определенного класса конструкций и материалов, например железобетонных конструкций, конструкций из композитных материалов, тонкостенных конструкций и т. п. Эта специализация позволяет более эффективно учитывать специфические особенности поведения материала и конструкции. Такой специализированной системой является система МКЭ КОМПОЗИТ, предназначенная для анализа несущей способности конструкций из композитных материалов.

Характерной особенностью этой системы является возможность анализа напряженно-деформированного состояния на уровне армирующих элементов (волокон) и матрицы, т. е. на микроуровне композитного материала. Переход на макроуровень осуществляется путем усреднения с учетом структуры и свойств компонентов, составляющих композит, а также технологии изготовления композитных материалов. Анализ несущей способности конструкций проводится на макроуровне с учетом реальных свойств композитного материала — анизотропии и неоднородности по координатам. Таким образом, исходными данными для расчета являются свойства волокон и матрицы, структура армирования и геометрия конструкции.

Система МКЭ КОМПОЗИТ позволяет проводить линейный и линеаризованный анализ напряженно-деформированного состояния, устойчивости и динамического поведения стержней, балок, пластин и оболочек из композитных материалов, а также тонкостенных конструкций, составленных из этих элементов. Система МКЭ КОМПОЗИТ позволяет также рассчитывать тонкостенные конструкции из традиционных материалов — металлов и сплавов. В этом случае задаются макросвойства материала и программные модули для микромеханического анализа не используются. Макросвойства материала можно задавать и в случае анализа конструкций из композитных материалов.

Система МКЭ КОМПОЗИТ создана по модульному принципу. В случае необходимости отдельные модули могут быть заменены новыми. Структура

системы МКЭ КОМПОЗИТ позволяет ее расширять — пополнять библиотеку новыми конечными элементами, проводить нелинейный анализ конструкции и т. п.

Содержание системы МКЭ КОМПОЗИТ. Входная информация задается либо непосредственным вводом нагрузок, свойств материала, геометрии и всех узловых точек, либо через так называемые препроцессорные программы, генерирующие узлы, геометрию и свойства материала конструкции.

Программы системы КОМПОЗИТ могут быть использованы для линейного и линеаризованного, статического и динамического анализа тонкостенных конструкций. Решаются следующие задачи:

- 1) линейная задача статического деформирования:

$$Kd = F; \quad (П5.1)$$

- 2) линеаризованная задача устойчивости:

$$Kd = \lambda Gd; \quad (П5.2)$$

- 3) определение частот линейных собственных колебаний:

$$Kd = \omega^2 Md; \quad (П5.3)$$

- 4) линейный анализ динамического поведения конструкции численным интегрированием уравнения движения:

$$M\ddot{d} + C\dot{d} + Kd = F(t). \quad (П5.4)$$

Микромеханический анализ путем энергетического усреднения позволяет определять усредненные (эффективные) характеристики жесткости композитного материала. Для этого энергия макродеформаций U_{**} приравнивается к энергии микродеформаций U_* :

$$U_{**} = U_*. \quad (П5.5)$$

Библиотека конечных элементов и модели материала. Во всех конечных элементах системы КОМПОЗИТ используются линейные модели материала:

- 1) закон Гука для описания упругого деформирования:

$$\sigma^{ij} = A^{ijkl} e_{kl}; \quad (П5.6)$$

- 2) закон теории наследственности для описания вязкоупругого деформирования:

$$\sigma^{ij} = \tilde{A}^{ijkl} e_{kl}. \quad (П5.7)$$

Здесь $\tilde{A}^{ijkl}$ — линейный дифференциальный или интегральный оператор.

В настоящее время библиотека системы МКЭ КОМПОЗИТ содержит 18 конечных элементов.

Стержневые и балочные элементы (ортотропный материал в осях конструкции):

- 1) плоский элемент многослойной балки $SI3W8$ (кубическая аппроксимация, 2 узла, 8 степеней свободы);

- 2) плоский гибридный элемент анизотропной балки $SIW4\sigma 2$ (кубическая аппроксимация для перемещений, линейная — для напряжений, 2 узла, 4 степени свободы по перемещениям);

- 3) плоский гибридный элемент анизотропной балки $SIW6\sigma 4$ (кубическая и линейная аппроксимация для перемещений, квадратичная — для напряжений, 2 узла, 6 степеней свободы по перемещениям);

4) плоский гибридный элемент трехслойной балки $SIW4\sigma12$ (линейная аппроксимация для перемещений, квадратичная — для напряжений, 2 узла, 4 степени свободы по перемещениям).

Мембранные плоские элементы (ортотропный материал):

1) треугольный конечный элемент с постоянной деформацией для плоской задачи $PLA1W6$ (линейная аппроксимация, 3 узла, 6 степеней свободы);

2) треугольный конечный элемент с постоянной деформацией для анти-плоской задачи $APLA1W3$ (линейная аппроксимация, 3 узла, 3 степени свободы);

3) треугольный конечный элемент второго порядка $PLA2W12$ (квадратичная аппроксимация, 6 узлов, 12 степеней свободы).

Плоские элементы изгибаемых однородных по толщине пластин:

1) треугольный конечный элемент второго порядка $PL2W18$ (квадратичная аппроксимация, 6 узлов, 18 степеней свободы);

2) треугольный конечный элемент первого порядка $PL1W9$ (линейная аппроксимация, 3 узла, 9 степеней свободы);

3) треугольный конечный элемент третьего порядка $PL3W30$ (кубическая аппроксимация, 10 узлов, 30 степеней свободы);

4) треугольный гибридный конечный элемент $PLW18\sigma18$ (квадратичная аппроксимация по перемещениям и напряжениям, 6 узлов, 18 степеней свободы по перемещениям).

Плоские элементы пространственно деформируемых и неоднородных по толщине пластин:

1) треугольный конечный элемент многослойной структуры $PL2W36$ (квадратичная аппроксимация, 6 узлов, 36 степеней свободы).

Элементы оболочек вращения:

1) изопараметрический конечный элемент третьего порядка для расчета разветвленных оболочек с ортотропными слоями $CAU3W24$ (кубическая аппроксимация, 2 узла, 24 степени свободы);

2) изопараметрический конечный элемент третьего порядка с ортотропными слоями $CAU3W20$ (кубическая аппроксимация, 2 узла, 20 степеней свободы).

Элементы произвольных оболочек:

1) изопараметрический многослойный конечный элемент второго порядка $CAU2W36$ для расчета разветвленных оболочек (квадратичная аппроксимация, 6 узлов, 36 степеней свободы);

2) изопараметрический многослойный конечный элемент второго порядка $CAU2W30$ (квадратичная аппроксимация, 6 узлов, 30 степеней свободы);

3) изопараметрический многослойный конечный элемент третьего порядка $CAU3W60$ для расчета разветвленных оболочек (кубическая аппроксимация, 10 узлов, 60 степеней свободы);

4) изопараметрический многослойный конечный элемент третьего порядка $CAU3W50$ (кубическая аппроксимация, 10 узлов, 50 степеней свободы).

Если не указан класс симметрии материала, то слои анизотропии с одной плоскостью симметрии, параллельной срединной поверхности.

Применение. Система метода конечных элементов КОМПОЗИТ создана на кафедре сопротивления материалов Рижского политехнического института им. А. Я. Пельше. Она применяется для анализа несущей способности различных элементов тойкостенных конструкций из композитных материалов, используемых в машиностроении.

Система МКЭ КОМПОЗИТ реализована на языке ФОРТРАН-IV для ЭВМ серии ЕС в операционной системе ОС. Минимальный объем оперативной памяти 300 Кбайт. Расчеты проводились на ЭВМ ЕС-1033, ЕС-1045, ЕС-1050, ЕС-1055 и ЕС-1060.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абовский Н. П., Андреев Н. П., Деруга А. П. Вариационные принципы теории упругости и теории оболочек. — М.: Наука, 1978. — 287 с.
2. Айнола Л. Я. Нелинейная теория типа Тимошенко для упругих оболочек. — Изв. АН ЭССР. Сер. физ.-мат. и техн. наук, 1965, т. 14, № 3, с. 337—344.
3. Айнола Л. Я. Вариационные методы для нелинейных уравнений движения оболочек. — Прикл. математика и механика, 1968, т. 32, вып. 1, с. 154—158.
4. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее приложения. Пер. с англ. — М.: Мир, 1972. — 316 с.
5. Алфутов Н. А., Зиновьев П. А., Попов Б. Г. Расчет многослойных пластин и оболочек из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1984. — 264 с.
6. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных пластин. — М.: Наука, 1967. — 268 с.
7. Амбарцумян С. А. Общая теория анизотропных оболочек. — М.: Наука, 1974. — 448 с.
8. Арзирис Дж. Г. Вычислительные машины и механика. — В кн.: Теоретическая и прикладная механика: Тр. XIV Междунар. конгр. IUTAM, Дельфт, Нидерланды, 30 авг. — 4 сент. 1976 г. Пер. с англ. — М.: Мир, 1979, с. 15—99.
9. Арчер. Формулировка матриц для анализа конструкций с использованием метода конечных элементов. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1965, № 10, с. 155—166.
10. Бандурин Н. Г., Николаев А. П. К расчету непологих оболочек с учетом геометрической нелинейности. — Прикл. механика, 1985, т. 21, № 8, с. 56—63.
11. Бате К., Вилсон Э. Численные методы анализа и метод конечных элементов. Пер. с англ. — М.: Стройиздат, 1982. — 448 с.
12. Богданович А. Е. Расчет поперечных и межслойных напряжений в цилиндрических оболочках из слоистых композитов при динамических сжимающих нагрузках. — Механика композит. материалов, 1985, № 3, с. 445—467.
13. Векча И. Н. Основы тензорного анализа и теории ковариантов. — М.: Наука, 1978. — 296 с.
14. Вольмир А. С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967. — 984 с.
15. Вольмир А. С. Нелинейная динамика пластин и оболочек. — М.: Наука, 1972. — 432 с.
16. Ву, Винсон. Свободные колебания пластинок и балок из материалов типа пиролитического графита. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика,

17. Галахер, Джеллатли, Пэдлог, Моллет. Расчет неустойчивости тонких оболочек методом дискретных элементов. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1967, № 1, с. 161—169.
18. Галимов К. З. Основы нелинейной теории тонких оболочек. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. — 326 с.
19. Галимов К. З. К нелинейной теории тонких оболочек типа Тимошенко. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1976, № 4, с. 155—166.
20. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. Пер. с англ. — М.: Мир, 1984. — 428 с.
21. Герштейн М. С. Геометрически нелинейные уравнения движения упругой многослойной оболочки. — Механика полимеров, 1973, № 5, с. 891—897.
22. Голдманис Н. В., Рикардс Р. Б. Применение изопараметрического элемента оболочки вращения в расчетах устойчивости ребристых оболочек. — В кн.: Всесоюз. симпози. по устойчивости в механике деформируемого твердого тела: Калинин, 4—7 сент., 1981 г. Тез. докл. Калинин, 1981, с. 83—84.
23. Григолюк Э. И., Кабанов В. В. Устойчивость оболочек. — М.: Наука, 1978. — 360 с.
24. Григоренко Я. М., Кокошин С. С. Численный анализ напряженного состояния слоистых анизотропных оболочек на базе смешанной модели МКЭ. — Прикл. механика, 1982, т. 18, № 2, с. 3—6.
25. Джордан П. Потеря устойчивости тороидальных оболочек под действием гидростатического давления. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1973, т. 11, № 10, с. 104—106.
26. Зенкевич О. Применение метода конечных элементов в технике. Пер. с англ. — М.: Мир, 1975. — 541 с.
27. Каган В. Ф. Основы теории поверхностей в тензорном изложении. Ч. 1. М.—Л.: Гостехиздат, 1947. — 506 с.
28. Кантор Б. Я., Пупков Л. И. Построение конечных элементов пологой оболочки на основе вариационного уравнения смешанного типа. — В кн.: Проблемы машиностроения. Киев, 1982, № 15, с. 8—13.
29. Киричевский В. В., Сахаров А. С. Исследование больших прогибов нетонких оболочек методом конечного элемента. — Проблемы прочности, 1975, № 11, с. 64—71.
30. Ковальчук Н. В. Метод конечных элементов в применении к исследованию ребристых цилиндрических оболочек. — Прикл. механика, 1976, т. 12, № 3, с. 28—33.
31. Кошелева Т. И., Фролов А. Н. Устойчивость моментного состояния тороидальной оболочки. — Изв. АН СССР. Механика твердого тела, 1973, № 3, с. 129—133.
32. Лехницкий С. Г. Изгиб неоднородных анизотропных тонких плит симметричного строения. — Прикл. математика и механика, 1941, т. 5, вып. 1, с. 822—832.
33. Либреску Л. К уточненной линейной теории упругих анизотропных многослойных оболочек. Ч. 1. — Механика полимеров, 1975, № 6, с. 1038—1050.
34. Лурье А. И. Теория упругости. — М.: Наука, 1970. — 940 с.
35. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. — М.: Наука, 1980. — 512 с.
36. Малмейстер А. К., Тамуж В. П., Тетерс Т. А. Соппротивление полимерных и композитных материалов. — Рига: Зинатне, 1980. — 571 с.
37. Метод суперэлементов в расчетах инженерных сооружений / Под ред. В. А. Постнова. — Л.: Судостроение, 1979. — 288 с.
38. Механика композитных материалов и элементов конструкций. Т. 2. Механика элементов конструкций / Под ред. Я. М. Григоренко. — Киев: Наук. думка, 1983. — 463 с.
39. Михлин С. Г. Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970. — 512 с.

40. Муштары Х. М., Галимов К. З. Нелинейная теория упругих оболочек. — Казань: Таткнигоиздат, 1957. — 432 с.
41. Наваратна, Пиан, Витмер. Расчет устойчивости оболочек вращения методом конечных элементов. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1968, № 2, с. 196—203.
42. Новичков Ю. Н. Изгиб, устойчивость и колебания многослойных оболочек. — В кн.: Теория оболочек и пластин. Тр. IX Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин, 1973 г. Л.: Судостроение, 1975, с. 142—145.
43. Новожилов В. В. Теория упругости. — Л.: Судпромгиз, 1958. — 370 с.
44. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1981. — 304 с.
45. Образцов И. Ф., Васильев В. В., Бунаков В. А. Оптимальное армирование оболочек вращения из композиционных материалов. — М.: Машиностроение, 1977. — 144 с.
46. Образцов И. Ф., Вольмир А. С. Торондажные оболочки, устойчивость и катастрофы. — Докл. АН СССР, 1982, т. 262, № 5, с. 1086—1088.
47. Образцов И. Ф., Савельев Л. Н., Хазанов Х. С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. — М.: Высш. школа, 1985. — 392 с.
48. Оден. Вычисление матриц геометрической жесткости сложных конструкций. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1966, № 8, с. 215—216.
49. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. Пер. с англ. — М.: Мир, 1976. — 464 с.
50. Паутов А. Н. Треугольный конечный элемент для анализа изгиба пластин с учетом деформации поперечного сдвига. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: изд. Горьков. ун-та, 1983, вып. 24, с. 72—77.
51. Паутов А. Н., Торопов В. В., Шуваев Д. Н. Вариационно-разностный метод расчета упругой устойчивости осесимметричных тонкостенных пространственных конструкций. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Механика деформируемых систем. Горький, 1979, вып. 12, с. 75—81.
52. Пелех Б. Л. Теория оболочек с конечной сдвиговой жесткостью. — Киев: Наук. думка, 1973. — 248 с.
53. Петрашкевич В. Некоторые соотношения нелинейной теории оболочек Рейснера. — Вести. Ленингр. ун-та, 1979, № 1, с. 115—124.
54. Постнов В. А. Численные методы расчета судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1977. — 280 с.
55. Постнов В. А., Хархурим И. Я. Метод конечных элементов в расчетах судовых конструкций. — Л.: Судостроение, 1974. — 344 с.
56. Работнов Ю. Н. Механика твердого деформируемого тела. — М.: Наука, 1979. — 744 с.
57. Рассказов А. О. Расчет многослойной ортотропной пологой оболочки методом конечных элементов. — Прикл. механика, 1978, т. 14, № 8, с. 51—56.
58. Рейснер Э. О некоторых вариационных теоремах теории упругости. — В кн.: Проблемы механики сплошной среды. М., 1961, с. 326—377.
59. Рикардс Р. Б. Об оптимальном пространственном армировании стержня, работающего на устойчивость и колебания. I. Конечные элементы балки Тимошенко. — Механика композит. материалов, 1980, № 4, с. 676—684.
60. Рикардс Р. Б., Голдманис М. В. Оптимизация ребристых цилиндрических оболочек из композитов, работающих на устойчивость при внешнем давлении. — Механика композит. материалов, 1980, № 3, с. 468—475.
61. Рикардс Р. Б., Снисаренко С. И. Деформирование при ударе балок из гибридных композитных материалов. — Механика композит. материалов, 1985, № 1, с. 97—103.
62. Рикардс Р. Б., Тетерс Г. А. Устойчивость оболочек из композитных материалов. — Рига: Зинатне, 1974. — 310 с.

63. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Изопараметрический треугольный конечный элемент для расчета многослойных непологих оболочек. — В кн.: Тр. XII Всесоюз. конф. по теории оболочек и пластин. Ереван: Изд-во Ереван. ун-та, 1980, т. 3, с. 179—184.
64. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. 1. Матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости элемента. — Механика композит. материалов, 1981, № 3, с. 453—460.
65. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Изопараметрический треугольный конечный элемент многослойной оболочки по сдвиговой модели Тимошенко. 2. Численные примеры. — Механика композит. материалов, 1981, № 5, с. 815—820.
66. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Оптимизация цилиндрических оболочек со спирально-винтовой системой ребер, работающих в режиме колебаний. — В кн.: Прикладные проблемы прочности и пластичности. Статика и динамика деформируемых систем. Горький: изд. Горьков. ун-та, вып. 24, 1983, с. 98—109.
67. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Вариант геометрически нелинейных соотношений теории анизотропных оболочек типа Тимошенко в задачах устойчивости. — Механика композит. материалов, 1985, № 2, с. 292—297.
68. Рикардс Р. Б., Чате А. К. Геометрически нелинейное докритическое состояние анизотропных оболочек. — Прикл. механика, 1985, т. 21, № 12, с. 68—77.
69. Рикардс Р. Б., Эглайс В. О., Голдманис М. В. Оптимизация конической оболочки, подкрепленной шпангоутами, под действием внешнего давления. — Прикл. механика, 1983, т. 19, № 12, с. 44—51.
70. Розин Л. А. Вариационные постановки задач для упругих систем. — Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1978. — 224 с.
71. Смирнов А. Ф., Александров А. В., Лашеников Б. Я., Шапошников Н. Н. Строительная механика. Динамика и устойчивость сооружений. — М.: Стройиздат, 1984. — 415 с.
72. Сокольников И. Тензорный анализ. Пер. с англ. — М.: Наука, 1971. — 376 с.
73. Справочник по специальным функциям / Под ред. М. Абрамовица, И. Стигаи. Пер. с англ. — М.: Наука, 1979. — 832 с.
74. Стренг Г., Фикс Дж. Теория метода конечных элементов. Пер. с англ. — М.: Мир, 1977. — 349 с.
75. Стриклин, Наваратна, Пиан. Усовершенствование расчета оболочек вращения матричным методом перемещений. Пер. с англ. — Ракет. техника и космонавтика, 1966, № 11, с. 252—254.
76. Теория оболочек с учетом поперечных сдвигов / Под ред. К. З. Галнмова. — Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. — 212 с.
77. Тимошенко С. П., Вайновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Пер. с англ. — М.: Мир, 1966. — 635 с.
78. Abbas B. A. H., Thomas J. Dynamic stability of Timoshenko beams resting on an elastic foundation. — J. Sound and Vibration, 1978, vol. 60, N 1, p. 33—44.
79. Ahmad S., Irons B. M., Zienkiewicz O. C. Analysis of thick and thin shell and plate structures. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1970, vol. 2, p. 419—451.
80. Argyris J. H., Doltsinis J. St., Straub K. Resent natural formulations in nonlinear mechanics. — In: Fenomech 81. Proc. 2nd Intern. conf. finite elements in nonlinear mechanics, Stuttgart, Aug. 25—28, 1981. Computer Methods Appl. Mech. and Eng., 1982, vol. 32, N 1—3, pt. 1, p. 2—156.
81. Argyris J. H., Dunne P. C., Haase M., Orkisz J. Higher-order simplex element for large strain analysis. Natural approach. — Computer Methods Appl. Mech. and Eng., 1978, vol. 16, N 3, p. 369—403.

82. *Argyris J. H., Fried I., Scharpf D.* The TUBA family of plate elements for the matrix displacement method. — *Aeronautics J.*, 1968, vol. 72, p. 701—709.
83. *Bathe K. J., Ho L. W.* A simple and effective element for analysis of general shell structures. — *Computers a. Structures*, 1980, vol. 13, p. 673—682.
84. *Belytschko T., Stolarski H., Carpenter N.* A C_0 triangular plate element with one-point quadrature. — *Intern. J. Numerical Methods Eng.*, 1984, vol. 20, N 5, p. 787—802.
85. *Bergan P. G., Horrigmoe G., Krakeland B., Soreide T. H.* Solution techniques for non-linear finite element problems. — *Intern. J. Numerical Methods Eng.*, 1978, vol. 12, N 11, p. 1677—1696.
86. *Brebbia C., Connor J.* Geometrical nonlinear finite-element analysis. — *J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, 1969, vol. 95, N EM2, p. 463—483.
87. *Carnoy E., Sander G.* Stability and postbuckling analysis of nonlinear structures. — *Computer Methods Appl. Mech. a. Eng.*, 1982, vol. 32, N 1—3, p. 329—364.
88. *Carrey G. F., Oden J. T.* Finite elements. A second course. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983, vol. 2. 300 p.
89. *Chang T. Y., Sawamiphakdi K.* Large deformation analysis of laminated shells by finite element method. — *Computers a. Structures*, 1981, vol. 13, p. 331—340.
90. *Chang T. Y., Sawamiphakdi K.* Large deflection and post-buckling analysis of shell structures. — *Computer Methods Appl. Mech. a. Eng.*, 1982, vol. 32, N 1—3, p. 311—326.
91. *Clough R. W., Johnson C. P.* A finite element approximation for the analysis of thin shells. — *Intern. J. Solids a. Structures*, 1968, vol. 4, N 1, p. 43—60.
92. *Cowper G. R., Kosko E., Lindberg A. M., Olson M. D.* Static and dynamic applications of a high-precision triangular plate bending element. — *AIAA J.*, 1969, vol. 7, N 10, p. 1957—1965.
93. *Cowper G. R., Lindberg A. M., Olson M. D.* A shallow shell finite element of triangular shape. — *Intern. J. Solids a. Structures*, 1970, vol. 6, p. 1133—1156.
94. *Delpak R.* Static analysis of thin rotational shells. — *Computers a. Structures*, 1980, vol. 11, N 4, p. 305—325.
95. *Dvorkin E. N., Bathe K. J.* A continuum mechanics based four-node shell element for general nonlinear analysis. — *Eng. Comput.*, 1984, vol. 1, N 1, p. 77—88.
96. *Fischlowitz E. G.* Investigation of elastic stability of circular toroidal shells under uniform external pressure. Washington, D. C., Naval Ship Research and Development Center. 1972, Rep. N 3338, Apr.
97. *Fraeijs de Veubeke B.* A conforming finite element for plate bending. — *Intern. J. Solids a. Structures*, 1968, vol. 4, N 1, p. 95—108.
98. *Gallagher R. H.* Finite element analysis of geometrically nonlinear problems. — In: *Theory and practice in finite element structural analysis* / Ed. by Y. Yamada, R. H. Gallagher. Tokyo, Univ. Press, 1973, p. 109—123.
99. *Green A. E., Zerna W.* Theoretical elasticity. Oxford, Clarendon Press, 1968. 455 p.
100. *Greimann L. F.* Finite element analysis of plate bending with transverse shear deformation. — *Nuclear Eng. a. Design*, 1970, vol. 14, N 2, p. 223—230.
101. *Han K. J., Gould P. L.* Shells of revolution with local deviations. — *Intern. J. Numerical Methods Eng.*, 1984, vol. 20, N 2, p. 305—313.

102. A handbook of finite element systems / Ed. by C. A. Brebbia Southampton, CML Publ., 1981. 490 p.
103. Hassan K. Application of lower order integration schemes in linear shell problems. — Computer Methods Appl. Mech. a. Eng., 1981, vol. 25, N 3, p. 279—286.
104. Hinton E., Bicanic N. A comparison of Lagrangian and Serendipity Mindlin plate elements for free vibration analysis. — Computers a. Structures, 1979, vol. 10, p. 483—493.
105. Hughes T. J. R., Liu W. K. Nonlinear finite element analysis of shells. 2. Two dimensional shells. — Computer Methods Appl. Mech. a. Eng., 1981, vol. 27, N 2, p. 167—181.
106. Hughes T. J. R., Taylor R. L. A new finite element for plate bending analysis. — In: Trans. 4th International Conference of Structural Mechanics in Reactor Technology, San-Francisco, 15—19 Aug., 1977. Amsterdam, North-Holland, 1977, vol. M.2.1, p. 1—11.
107. Irons B. A. Conforming quartic triangular element for plate bending. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1969, vol. 1, N 1, p. 29—46.
108. John F. Estimates for the derivatives of the stresses in a thin shell and interior shell equations. — Communications Pure a. Appl. Math., 1965, vol. 18, p. 135—267.
109. John F. Refined interior equations for thin elastic shells. — Communications Pure a. Appl. Math., 1971, vol. 24, p. 583—615.
110. Jones F., jun. A curved finite element for general thin shell structures. — Nuclear Eng. a. Design, 1978, vol. 48, p. 415—425.
111. Kalnins A. On the derivation of a general theory of elastic shells. — Ind. J. Math., 1967, vol. 9, N 2, p. 381—425.
112. Kant T., Owen D. R. J., Zienkiewicz O. C. A refined higher-order C_0 plate bending element. — Computers a. Structures, 1982, vol. 15, N 2, p. 177—183.
113. Kiciman O. K., Popov E. P. Post-buckling analysis of cylindrical shells. — J. Eng. Mech. Div., 1978, vol. 104, N 4, p. 751—762.
114. Koiter W. T. On the nonlinear theory of thin elastic shells. — Proc. Konkl. Nederl. Akad. van Wetenschappen. Ser. B, 1969, bd 69/1, blz. 1—54.
115. Köper H. D. Theorie und numerische Lösung des Stabilitätsproblems allgemeiner Rotationschalen. — Technischwissenschaft. Mitt. Inst. Konstruktiven Ing. Ruhr Univ. Bochum, 1974, N 2, S. 1—135.
116. Kraus A. Thin elastic shells. New York etc., John Wiley, 1967. 476 p.
117. Mau S. T., Tong P., Pian T. H. H. Finite element solutions for laminated thick plates. — J. Composites Materials, 1972, vol. 6, Apr., p. 304—311.
118. Mindlin R. D. Influence of rotatory inertia and shear on flexural motions of isotropic rectangular plates. — J. Appl. Mech., 1951, vol. 18, March, p. 31—38.
119. Mohr G. A. Application of penalty factors to a doubly curved quadratic shell element. — Computers a. Structures, 1981, vol. 14, p. 15—19.
120. Mohr G. A. A doubly curved isoparametric triangular shell element. — Computers a. Structures, 1981, vol. 14, p. 9—13.
121. Mohr G. A., Paterson N. B. A natural numerical differential geometry scheme for a doubly curved shell element. — Computers a. Structures, 1984, vol. 18, N 3, p. 433—439.
122. Morley L. S. D. A triangular finite element for the analysis of membrane and inextensional bending behaviours in circular cylindrical shells. — Computers a. Structures, 1978, vol. 8, p. 433—443.
123. Morley L. S. D. Hellinger—Reissner principles for plate and shell finite elements. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1984, vol. 20, N 11, p. 773—777.
124. Mungan J. Buckling stresses of stiffened hyperboloidal shells. — J. Structural Div. Proc. Amer. Soc. Civ. Eng., 1979, vol. 105, N 8, p. 1589—1604.

125. *Murakawa H., Atluri S. N.* Finite deformations, finite rotations, and stability of plates: a complementary energy — finite element analysis. — In: AIAA/ASME/ASCE/AHS 22nd Structure, structure dynamics and material conf., Atlanta, 1981. Coll. techn. papers. New York, 1981, pt 1, p. 7—15.
126. *Murty A. V. K.* Vibration of short beams. — AIAA J., 1969, vol. 7, N 1, p. 34—38.
127. *Naghdi P. M.* On the theory of thin elastic shells. — Quart. Appl. Math., 1957, vol. 14, N 4, p. 369—380.
128. *Naghdi P. M.* Foundations of elastic shell theory. — In: Progress in solid mechanics. Amsterdam, North-Holland, 1963, vol. 4, ch. 1, p. 1—90.
129. *Nickell R. E., Secor G. A.* Convergence of consistently derived Timoshenko beam finite elements. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1972, vol. 5, p. 243—253.
130. *Noor A. K.* Recent advances in reduction methods for nonlinear problems. — Computers and Structures, 1981, vol. 13, p. 31—41.
131. *Noor A. K., Peters J. M.* Mixed models and reduced selective integration displacement models for vibration analysis of shells. — In: Hybrid and mixed finite element methods. Intern. symp., Atlanta, 8—10 Apr., 1981. Chichester, John Wiley, 1983, p. 537—564.
132. *Oden J. T., Carrey A. F.* Finite elements. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1983, vol. 4. Mathematical aspects. 195 p.
133. *Oden J. T., Carrey A. F.* Finite elements. Englewood Cliffs, Prentice-Hall, 1984, vol. 3. Computational aspects. 350 p.
134. *Olson M. D.* Analysis of arbitrary shells using shallow shell finite elements. — In: Thin-shell structures. Theory, experiment and design / Ed. by Y. C. Fung, E. E. Sechler. New Jersey, Prentice-Hall, 1974, p. 403—434.
135. *Olson M. D., Bearden T. W.* A simple flat triangular shell element revisited. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1979, vol. 14, N 1, p. 51—68.
136. *Pagano H. J.* Exact solutions for composite laminates in cylindrical bending. — J. Composite Materials, 1969, vol. 3, p. 398—341.
137. *Panagiotopoulos G., Kokkinowrachos K.* Untersuchung des Stabilitätsverhaltens von Torusschalen unter hydrostatischem Druck. Forschungsber. Landes Nordrhein-Westfalen, 1979, N 2870. 80 S.
138. *Pian T. H. H.* Reflections and remarks on hybrid and mixed finite element methods. — In: Hybrid and mixed finite element methods. Intern. symp., Atlanta, 8—10 Apr., 1981. Chichester, John Wiley, 1983, p. 565—570.
139. *Pian T. H. H., Chen D.* On the suppression of zero energy deformation modes. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1983, vol. 19, N 12, p. 1741—1752.
140. *Pryor C. W., Baker R. M.* A finite-element analysis including transverse shear effects for application to laminated plates. — AIAA J., 1971, vol. 9, N 5, p. 912—917.
141. *Przemieniecki J. S.* Theory of matrix structural analysis. — New York, Mc Graw-Hill, 1968. 452 p.
142. *Reissner E.* The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. — J. Appl. Mech., 1945, vol. 12, June, p. A69—A77.
143. *Reissner E.* On a variational theorem on elasticity. — J. Math. Phys., 1950, vol. 29, N 2, p. 90—95.
144. *Reissner E.* Stress-strain relations in the theory of thin elastic shells. — J. Math. Phys., 1952, vol. 31, N 2, p. 109—119.
145. *Reissner E.* On transverse vibration of thin shallow shells. — Quart. Appl. Math., 1955, vol. 13, N 2, p. 169—170.
146. *Reissner E.* On transverse bending of plates, including the effects of transverse shear deformation. — Intern. J. Solids and Structures, 1975, vol. 11, p. 569—573.

147. *Reissner E.* On a certain mixed variational theorem and a proposed application. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1984, vol. 20, N 7, p. 1366—1368.
148. *Rikards R. B., Goldmanis M. V.* A curved finite element of revolution shells after Timoshenko's shear model. — Ztschr. Angew. Math. u. Mech., 1985, Bd 65, H. 9, S. 427—436.
149. *Ross C. T. F.* Finite elements for the vibration of cones and cylinders. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1975, vol. 9, N 4, p. 833—845.
150. *Ross C. T. F.* Vibration and instability of ring-reinforced circular cylindrical and conical shells. — J. Ship Research, 1976, vol. 20, N 1, p. 22—31.
151. *Salerno N. L., Goldberg M. A.* Effect of shear deformation on the bending of rectangular plates. — J. Appl. Mech., 1960, vol. 27, March, p. 54—58.
152. *Sanders J. L.* Nonlinear theories for thin shells. — Quart. Appl. Math., 1963, vol. 21, N 1, p. 21—36.
153. *Schmieder L.* Schalentheorie mit Schubverformungen in allgemeinen Koordinaten, 1. — Ztschr. Flugwissensch., 1969, Bd 17, N 11, S. 391—404.
154. *Scordelis A. C., Lo K. S.* Computer analysis of cylindrical shells. — J. Amer. Concrete Inst., 1964, vol. 61, N 1, p. 539—561.
155. *Spilker R. L.* A hybrid — stress finite-element formulation for thick multilayer laminates. — Computers a. Structures, 1980, vol. 11, p. 507—514.
156. *Spilker R. L.* Hybrid — stress eight-node element for thin and thick multilayer laminated plates. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1982, vol. 18, p. 801—828.
157. *Spilker R. L.* Hybrid — stress reduced Mindlin isoparametric elements for the analysis of thin plates. — J. Structural Mech., 1983, vol. 11, N 1, p. 49—66.
158. *Spilker R. L.* An invariant eight-node hybrid—stress element for thin and thick multilayer laminate plates. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1984, vol. 20, N 3, p. 573—582.
159. *Spilker R. L., Chou S. C., Orringer O.* Alternate hybrid—stress elements for analysis of multilayer composite plates. — J. Composite Materials, 1977, vol. 11, Jan., p. 51—70.
160. *Spilker R. L., Munir N. I.* The hybrid—stress model for thin plates. — Intern. J. Numerical Methods Eng., 1980, vol. 15, p. 1239—1260.
161. *Stumpf H.* Stationary and extremal variational principles in nonlinear moderate rotation shell theory. — In: Mechanics of inelastic media and structures: Proc. of the Intern. symp. Warsaw, Sept. 8—13, 1978. Warsaw, 1982, p. 267—281.
162. *Subbiah J., Natarajan R.* Stability analysis of ring stiffened shells of revolution. — Computers a. Structures, 1981, vol. 14, N 5—6, p. 479—490.
163. *Svec O. J., Gladwell G.* A triangular plate bending for contact problems. — Intern. J. Solids a. Structures, 1973, vol. 9, p. 435—446.
164. *Talaslidis D., Wunderlich W.* Static and dynamic analysis of Kirchhoff shells based on a mixed finite element formulation. — Computers a. Structures, 1979, vol. 10, N 1—2, p. 239—249.
165. *Thomas D. L., Wilson J. M., Wilson R. R.* Timoshenko beam finite elements. — J. Sound a. Vibration, 1973, vol. 31, N 3, p. 315—330.
166. *Timoshenko S. P.* On the correction for shear of the differential equation for transverse vibration of prismatic bars. — Philos. Mag., 1921, vol. 41, N 6, p. 744—746.
167. *Tong P., Pian T. H. H.* A variational principle and the convergence of the finite element method based on assumed stress distribution. — Intern. J. Solids a. Structures, 1969, vol. 5, p. 436—472.
168. *Warbuton G. B.* Vibration of thin cylindrical shells. — Proc. Inst. Mech. Eng. J. Mech. Eng. Sci., 1965, vol. 7, p. 399—402.

169. *Washizu K.* Variational methods in elasticity and plasticity. New York, Pergamon Press, 1975. 412 p.
170. *Wempner G. A., Oden J. T., Kross D. A.* Finite element analysis of thin shells. — *J. Eng. Mech. Div. Proc. Amer. Soc. Civil Eng.*, 1968, vol 94, N EM6, Dec., p. 1273—1294.
171. *Yoshida Y., Nomura T., Masuda N.* A formulation and solution procedure for post-buckling of thin-walled structures. — *Computer Methods Appl. Mech. a. Eng.*, 1982, vol. 32, N 1—3, p. 285—309.
172. *Zenisek A.* Interpolation polynomials on the triangle. — *Numerische Math.*, 1970, Bd 15, S. 283—296.
173. *Zienkiewicz O. C.* The finite element method: from intuition to generality. — *Appl. Mech. Rev.*, 1970, N 3, p. 249—256.
174. *Zienkiewicz O. C., Bauer J., Morgan K., Onate E.* A simple and efficient element for axisymmetric shells. — *Intern. J. Numerical Methods Eng.*, 1977, vol. 11, p. 1545—1558.
175. *Zienkiewicz O. C., Too J., Taylor R. L.* Reduced integration techniques in general analysis of plates and shells. — *Intern. J. Numerical Methods Eng.*, 1971, vol. 3, p. 575—586.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	5
От автора	8
Основные обозначения	10

Глава 1

Основные соотношения линейной теории оболочек и пластин в вариационной постановке	16
1.1. Введение	16
1.2. Основные вариационные уравнения теории упругости в методе конечных элементов	19
1.3. Кинематические соотношения в линейной теории оболочек типа Тимошенко	24
1.3.1. Общий случай криволинейных неортогональных координат	24
1.3.2. Общий случай криволинейных ортогональных координат	27
1.3.3. Оболочки вращения	30
1.3.4. Цилиндрические оболочки	32
1.3.5. Конические оболочки	33
1.3.6. Пластины в декартовых координатах	34
1.3.7. Пластины в полярных координатах	34
1.3.8. Балки при плоском изгибе	35
1.4. Энергия деформаций в линейной теории оболочек типа Тимошенко	36
1.5. Физические соотношения для многослойных оболочек	38
1.6. Работа внешних сил	41
1.7. Кинетическая энергия	48
1.8. Вариационное уравнение Лагранжа в линейной теории оболочек типа Тимошенко	49
1.9. Вариационное уравнение Гамильтона—Остроградского в линейной теории оболочек типа Тимошенко	51
1.10. Частные случаи вариационного уравнения Лагранжа для плоских элементов конструкций	54
1.10.1. Пластины в декартовых координатах	54
1.10.2. Балки при плоском изгибе	58
1.11. Напряжения в оболочках и пластинах	62
1.11.1. Однородные по толщине оболочки	63
1.11.2. Слоистые оболочки	66

Глава 2

Вариационные уравнения смешанного типа в линейной теории оболочек типа Тимошенко	70
2.1. Введение	70
2.2. Вариационные уравнения обобщенного вариационного принципа	71
2.2.1. Общий случай произвольных оболочек	71
2.2.2. Пластины в декартовых координатах при поперечном изгибе	74

2.3. Вариационные уравнения Рейснера	75
2.3.1. Общий случай произвольных оболочек	76
2.3.2. Пластинки в декартовых координатах при поперечном изгибе	78
2.4. Вариационные уравнения Кастильяно	81
2.4.1. Общий случай произвольных оболочек	81
2.4.2. Пластинки в декартовых координатах при поперечном изгибе	82
2.5. Модифицированные формы функционала Рейснера	83
2.5.1. Пластинки в декартовых координатах при поперечном изгибе	83
2.5.2. Балки при плоском изгибе	83

Глава 3

Вариационные уравнения метода перемещений в нелинейной теории оболочек типа Тимошенко	85
3.1. Введение	85
3.2. Принцип стационарности потенциальной энергии в геометрически нелинейной теории упругости	86
3.2.1. Энергетический критерий устойчивости	87
3.3. Кинематические соотношения	90
3.4. Энергия нелинейных деформаций	95
3.4.1. Энергия деформаций в начальном послекритическом состоянии	96

Глава 4

Аппроксимация одномерными конечными элементами в методе перемещений	103
4.1. Введение	103
4.2. Изопараметрический конечный элемент оболочки вращения	104
4.2.1. Матрица жесткости	108
4.2.2. Матрица масс	111
4.2.3. Матрица геометрической жесткости	112
4.2.4. Эквивалентные узловые силы	113
4.2.5. Геометрия разветвленной оболочки	115
4.3. Задачи изгиба оболочек вращения	120
4.3.1. Изгиб цилиндрической оболочки под действием распределенной по линии окружности нагрузки	121
4.3.2. Изгиб круговой тороидальной оболочки под действием внутреннего давления	124
4.3.3. Изгиб сферической оболочки под действием распределенного момента	126
4.3.4. Изгиб заполненной жидкостью оболочки	127
4.4. Задачи устойчивости гладких оболочек вращения	128
4.4.1. Устойчивость цилиндрической оболочки при внешнем давлении	129
4.4.2. Устойчивость тороидальной оболочки при внешнем давлении	131
4.4.3. Устойчивость оболочки вращения при внешнем давлении	133
4.4.4. Устойчивость цилиндрической оболочки из стеклопластика со сферическими днищами при внешнем давлении	134
4.5. Расчет оболочек вращения с кольцевой системой ребер	135
4.6. Собственные колебания оболочек вращения	140
4.7. Конечный элемент круглой пластины	141
4.8. Конечный элемент балки Тимошенко	145
4.8.1. Матрицы жесткости, масс и геометрической жесткости	146
4.8.2. Частоты собственных колебаний	151
4.8.3. Нестационарное динамическое деформирование	152

Глава 5

Аппроксимации двумерными конечными элементами в методе перемещений	157
5.1. Введение	157
5.2. Изопараметрический треугольный конечный элемент для описания деформирования произвольных оболочек	160
5.2.1. Матрица жесткости	163
5.2.2. Матрица масс	165
5.2.3. Матрица геометрической жесткости	165
5.2.4. Эквивалентные узловые силы	166
5.3. Треугольный конечный элемент для описания изгиба пластин	167
5.3.1. Матрица жесткости	168
5.3.2. Матрица масс	172
5.3.3. Эквивалентные узловые силы	172
5.4. Тестирование конечных элементов	175

Глава 6

Двумерные задачи деформирования оболочек и пластин	177
6.1. Введение	177
6.2. Задачи изгиба оболочек	178
6.2.1. Изгиб цилиндрической оболочки под действием распределенной по образующей нагрузки	178
6.2.2. Изгиб цилиндрического перекрытия под действием распределенной вертикальной нагрузки	183
6.3. Собственные колебания цилиндрических оболочек	186
6.4. Колебания ребристых оболочек	188
6.5. Устойчивость конических оболочек	195
6.6. Нелинейное деформирование оболочек	197
6.6.1. Состояние равновесия	198
6.6.2. Матрицы секущей и тангенциальной жесткости	201
6.6.3. Численные примеры	205
6.7. Задачи изгиба прямоугольных пластин	207
6.7.1. Изгиб пластины под действием равномерно распределенной нагрузки	208
6.7.2. Изгиб прямоугольной пластины с вырезом	210
6.8. Собственные колебания прямоугольных пластин	212
6.9. Эффективная жесткость и несущая способность оболочек из сетчатого композитного материала	213

Глава 7

Смешанные и гибридные схемы метода конечных элементов	223
7.1. Введение	223
7.2. Гибридные конечные элементы анизотропных балок	226
7.3. Гибридный конечный элемент многослойной балки	235
7.4. Гибридный треугольный конечный элемент изгибаемой ортотропной пластины	243
Приложение 1. Геометрия оболочки	253
Приложение 2. Итерационный метод определения минимального собственного значения	262
Приложение 3. Оценка погрешности конечноэлементных решений	265
Приложение 4. Схемы численного интегрирования	268
Приложение 5. Пакет прикладных программ КОМПОЗИТ для анализа тонкостенных конструкций	270
Список литературы	273